



TECNOLÓGICO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE ECATEPEC

DIVISIÓN DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA Y TELEMÁTICA

NÚMEROS COMPLEJOS

Y

ÁLGEBRA LINEAL

CON APLICACIONES



Material de Apoyo para el Curso de

Matemáticas IV

M. en C. Antonio Silva Martínez

2007



INTRODUCCIÓN

Este material es de apoyo para el curso de Matemáticas IV, del plan de estudios DGEST 2004 de la carrera de Ingeniería Electrónica, correspondiente a Números Complejos y Álgebra Lineal, resultado del compromiso profesional hacia la institución para una sólida formación académica de los estudiantes en Ingeniería Electrónica.

Como herramienta necesaria en la modelación y solución de problemas de ingeniería en general, las matemáticas merecen un especial apoyo con material didáctico detallado para la buena comprensión y motivación de los estudiantes. Para lo cual se ha preparado este nuevo trabajo con ejemplos resueltos, desarrollados con los pasos detallados hasta su solución, así como algo muy importante que debe motivar al estudiante de Ingeniería Electrónica sobre la importancia y retos de las matemáticas en su formación académica: ejemplos y ejercicios prácticos de circuitos eléctricos estables. Complementándose este trabajo con ejercicios de práctica para el estudiante y sus respuestas a los impares.

Las Matemáticas en general no pueden estudiarse en forma contemplativa o pasiva, al contrario, requieren una actitud dinámica y participativa. Bajo este punto de vista, se espera que el alumno se anime a analizar, comprender y realizar con este apoyo, la mayor cantidad de ejercicios y problemas aplicados posibles. Adquiriendo así las bases cognitivas para asignaturas posteriores de la carrera, donde se analicen fenómenos electrónicos mediante esta importante herramienta.

Para la compilación de este trabajo se ha contado con la valiosa ayuda de Lobsang Javier Mendoza Licea y César Martín García Prado, egresados de la carrera de Ingeniería Electrónica, quienes se han dado la tarea de revisar minuciosamente los ejemplos y ejercicios propuestos en este problemario, para una mejor calidad y aprovechamiento del mismo por parte de los alumnos.

Finalmente, este trabajo se presenta ante la coordinación de Material Didáctico y la Academia de Ciencias Básicas de la División de Ingeniería Electrónica y Telemática del TESE, el cual ha sido avalado por las mismas para su difusión y uso del mismo por parte de los profesores y estudiantes de la División.

M. EN C. ANTONIO SILVA MARTÍNEZ
DOCENTE DE LA DIVISIÓN



ÍNDICE

	Página
1. Números Complejos	
1.1 Origen de los números complejos.	5
1.2. Los números complejos y su Algebra.	6
1.2.1 Operaciones elementales con números complejos.	7
1.2.2 Conversión de forma rectangular a forma polar de un numero complejo	7
1.2 Ejemplos	8
1.2 Ejercicios	13
1.3 Potencia real de un número complejo.	14
1.3 Ejemplos.	15
1.3 Ejercicios.	19
1.4 Raíces de un número complejo.	20
1.4 Ejemplos.	21
1.4 Ejercicios.	24
1.5 Logaritmo complejo.	25
1.5 Ejemplos.	27
1.6 Exponencial compleja.	30
1.6 Ejemplos.	31
1.6 Ejercicios.	34
2. Sistemas de Ecuaciones Lineales	
2.1 Introducción a los sistemas de Ecuaciones Lineales.	35
2.2 Interpretación geométrica de las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales.	36
2.2.1 Sistemas de ecuaciones lineales en R^2	36
2.2.2 Sistemas de ecuaciones lineales en R^3	38
2.3 Métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales "Eliminación de Gauss".	40
2.3 Ejemplos.	40
2.3 Ejercicios.	45
2.4 Eliminación por "Gauss-Jordán".	46
2.4 Ejemplos.	47
2.4 Ejercicios.	49
2.5 Aplicaciones. Circuitos Eléctricos (redes)	51
2.5 Ejemplos.	52
2.5 Ejercicios.	58

3. Matrices y Determinantes.	
3.1 Introducción.	59
3.2 Operaciones con matrices.	59
3.2.2 Multiplicación de matrices.	60
3.2 Ejemplos.	62
3.2 Ejercicios.	65
3.3 Clasificación de Matrices.	66
3.4 Matriz inversa.	70
3.4 Ejemplos.	73
3.4 Ejercicios.	77
3.5 Determinante de una matriz.	78
3.6 Propiedades de los determinantes.	80
3.6 Ejemplos.	82
3.6 Ejercicios.	85
3.7 Adjunta de una matriz.	86
3.7 Ejemplos.	88
3.7 Ejercicios.	93
3.8 Solución de un sistema de ecuaciones lineales a través de la inversa.	94
3.8 Ejemplos.	95
3.8 Ejercicios.	100
3.9 Solución de un sistema de ecuaciones lineales por la Regla de Cramer.	101
3.9 Ejemplos.	102
3.9 Ejercicios.	106
4. Espacios Vectoriales	
4.1 Definición	107
4.1 Ejemplos	108
4.1 Ejercicios	113
4.2 Subespacios Vectoriales	115
4.2 Ejemplos	115
4.2 Ejercicios	123
4.3 Independencia lineal	124
4.3 Ejemplos	124
4.3 Ejercicios	126
4.4 Bases vectoriales	127
4.4 Ejemplos	127
4.4 Ejercicios	130
4.1.1 Cambio de Base	131
4.1.1 Ejemplos	134
4.1.1 Ejercicios	143
5. Transformaciones	
5.1 Transformaciones Lineales	145
5.1 Ejemplos	147
5.1 Ejercicios	154
6. Apéndice. Álgebra Lineal con Scientific Word Place (Versión 5.0)	156
7. Bibliografía Consultada	167

1. NÚMEROS COMPLEJOS

1.1 ORIGEN DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

Los números complejos fueron propuestos inicialmente en 1545, por el matemático italiano Girolamo Cardano, en un tratado monumental acerca de la solución de la ecuación cúbica y cuártica titulado *Ars Magna*. Para apreciar la dimensión de esta propuesta debe tenerse en cuenta que el concepto de números negativos apenas había tenido aceptación, y que aun había controversia en relación con sus propiedades. Las cantidades “ficticias” de Cardano fueron ignoradas por la mayoría de sus colegas, hasta que el genio matemático Carl Friedrich Gauss les dio el nombre actual y las utilizó para demostrar el Teorema Fundamental del Algebra, el cual establece que todo polinomio que no sea constante tiene al menos un cero. En esta sección se explorarán las propiedades de los números complejos y sus operaciones elementales, Además de algunas funciones con valores complejos, que en la teoría de funciones de una variable compleja extiende los conceptos del cálculo al plano complejo y por consiguiente la derivación y la integración complejas adquieren una nueva profundidad y elegancia, y por lo tanto la naturaleza bidimensional del plano complejo produce muchos resultados útiles en Matemáticas Aplicadas en la Ingeniería. En particular a la Ingeniería de Circuitos Eléctricos Transitorios y Análisis de Señales, simplificando notoriamente los cálculos que llevan a la interpretación de su comportamiento.

1.2. LOS NÚMEROS COMPLEJOS Y SU ÁLGEBRA

Un *número complejo* es un número de la forma $a + bi$ donde a y b son números reales e i es un símbolo con la propiedad de que $i^2 = -1$. El número real a se considera como un tipo especial de número complejo, de razón de que $a = a + 0i$. Si $Z = a + bi$ es un número complejo, entonces la *parte real* de Z denotada por $\text{Re } Z$ es a y la *imaginaria* de Z denotada por $\text{Im } z$ es b . Dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son *iguales* si sus partes reales e imaginaria son iguales, es decir si, $a = c$ y $b = d$. Un número complejo $a + bi$ puede identificarse con el punto (a, b) graficado en un plano, denominado *plano complejo* o *plano de Argand*., como se muestra en la siguiente figura. En el plano complejo, el eje horizontal se le conoce como el eje real, mientras que el eje vertical se conoce como eje imaginario.

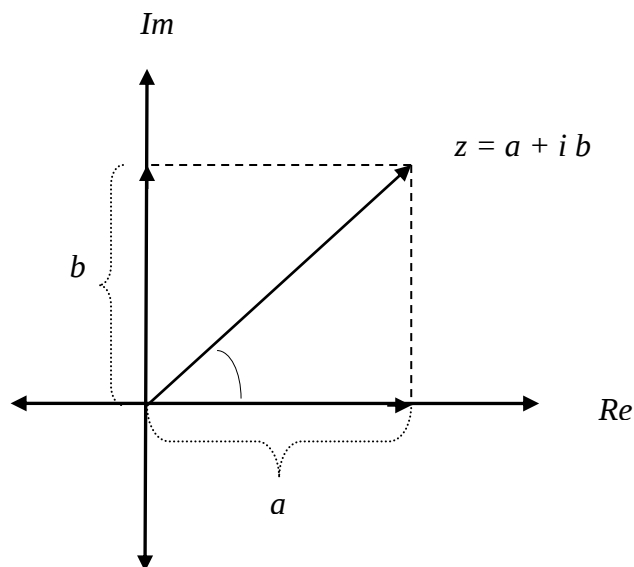


Figura 1.2 Representación de un número complejo z en el plano complejo

1.2.1 OPERACIONES ELEMENTALES CON NÚMEROS COMPLEJOS

La suma, la diferencia, el producto y el cociente de dos números complejos $Z_1 = a_1 + b_1i$ y $Z_2 = a_2 + b_2i$ dan como resultado un número complejo y se definen de la siguiente manera:

$$(i) \quad Z_1 + Z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$(ii) \quad Z_1 - Z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

$$(iii) \quad Z_1 Z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i$$

$$(iv) \quad \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{(a_1 + b_1i)(a_2 - b_2i)}{(a_2 + b_2i)(a_2 - b_2i)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2)}{a_1^2 + a_2^2} + \frac{(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_1^2 + a_2^2}i$$

En otras palabras, al sumar o restar dos números complejos simplemente se suman o se restan las partes reales y las imaginarias correspondientes. Para multiplicar dos números complejos aplicamos la ley distributiva y el hecho de que $i^2 = -1$. Finalmente, para el cociente de dos complejos se aplica la regla del binomio conjugado.

1.2.2 CONVERSION DE FORMA RECTANGULAR A FORMA POLAR DE UN NÚMERO COMPLEJO

Sea:

$$Z_1 = a_1 + b_1i$$

De donde:

$$|Z_1| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$$

$$\Theta = \tan^{-1}\left(\frac{b_1}{a_1}\right)$$

Entonces:

Forma Polar de un Número Complejo:

$$Z_1 = |Z_1| \angle \Theta$$

$$Z = |Z| [\cos \Theta + i \sin \Theta]$$

1.2 EJEMPLOS. Realizar las siguientes operaciones con los números complejos que se dan a continuación y expresar sus resultados en forma rectangular y polar.

Donde:

$$a) Z_1 + Z_2 \quad e) \frac{Z_1}{Z_3}$$

$$b) Z_4 - Z_3 \quad f) \frac{Z_3}{Z_4} + Z_1$$

$$c) 3Z_1 - Z_3 \quad g) (Z_1 Z_3) - Z_2$$

$$d) Z_2 Z_4$$

$$Z_1 = 3 + 2i$$

$$Z_2 = 4 - 3i$$

$$Z_3 = -2 - 7i$$

$$Z_4 = \frac{1}{3} + \frac{4}{7}i$$

Forma rectangular:

$$\begin{aligned} a) \quad Z_1 + Z_2 &= (3 + 2i) + (4 - 3i) \\ &= (3 + 4) + (2 - 3)i \\ &= 7 - i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad Z_4 - Z_3 &= \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{7}i\right) - (-2 - 7i) \\ &= \left(\frac{1}{3} + 2\right) + \left(\frac{4}{7} + 7\right)i \\ &= \frac{7}{3} + \frac{53}{7}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad 3Z_1 - Z_3 &= 3(3 + 2i) - (-2 - 7i) \\ &= (9 + 6i) + (2 + 7i) \\ &= (9 + 2) + (6 + 7)i \\ &= 11 + 13i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) \quad Z_2 Z_4 &= (4 - 3i) * \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{7}i\right) \\ &= (4 - 3i) * \left(\frac{1}{3}\right) + (4 - 3i) * \left(\frac{4}{7}i\right) \\ &= \frac{4}{3} - i + \frac{16}{7} - \frac{12}{7} \\ &= \frac{76}{21} - \frac{19}{7}i \\ &= \frac{16}{3} - i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e) \quad \frac{Z_1}{Z_3} &= \frac{3+2i}{-2-7i} \\
 &= \frac{(3+2i)*(-2+7i)}{(-2-7i)*(-2+7i)} = \frac{-6-4i+21i-14}{4+14i-14i+49} \\
 &= \frac{-6-14-4i+21i}{4+49} \\
 &= \frac{-20}{53} + \frac{17}{53}i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f) \quad \frac{Z_3}{Z} + Z_1 &= \frac{-2-7i}{\frac{1}{3} + \frac{4}{7}i} + (3+2i) \\
 &= \frac{(-2-7i)*(\frac{1}{3} - \frac{4}{7}i)}{(\frac{1}{3} + \frac{4}{7}i)*(\frac{1}{3} - \frac{4}{7}i)} = \frac{\frac{-2}{3} - \frac{7}{3}i + \frac{8}{7}i - 4}{\frac{1}{9} + \frac{4}{21}i - \frac{4}{21}i + \frac{16}{49}} \\
 &= \frac{(\frac{-2}{3} - 4) + (\frac{-7}{3} + \frac{8}{7})i}{(\frac{1}{9} + \frac{16}{49}) + (\frac{4}{21} - \frac{4}{21})i} = \frac{\frac{-14}{3} - \frac{25}{21}i}{\frac{193}{441} + 0i} = \frac{-14}{3} - \frac{25}{21}i \\
 &= \frac{-14}{3} - \frac{25}{21}i = -\frac{2058}{193} - \frac{525}{193}i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{Z_3}{Z_4} + Z_1 &= \left(-\frac{2058}{193} - \frac{525}{193}i\right) + (3+2i) \\
 &= \left(-\frac{2058}{193} + 3\right) + \left(-\frac{525}{193} + 2\right)i \\
 &= -\frac{1479}{193} - \frac{139}{193}i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g) \quad (Z_1 Z_3) - Z_2 &= (3+2i)*(-2-7i) - (4-3i) \\
 &= (3+2i)*(-2-7i) = -6-4i-21i+14 \\
 &= (-6+14) + (-4-21)i = 8-25i \\
 (Z_1 Z_3) - Z_2 &= 8-25i - 4+3i \\
 &= (8-4) + (-25+3)i \\
 &= 4-22i
 \end{aligned}$$

Forma polar:

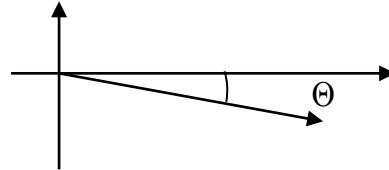
$$a) Z_1 + Z_2 = (3 + 2i) + (4 - 3i)$$

$$Z_1 + Z_2 = 7 - i$$

$$|Z| = |Z_1 + Z_2| = \sqrt{(7)^2 + (-1)^2} = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50}$$

$$\Theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(-\frac{1}{7}\right) = -0.1418 \text{ rads.} = -8.07^\circ$$

$$\begin{array}{ccc} 3.1416 \text{ rads} & \longrightarrow & 180^\circ \\ -0.1418 \text{ rads} & \longrightarrow & \Theta = -8.07^\circ \end{array}$$

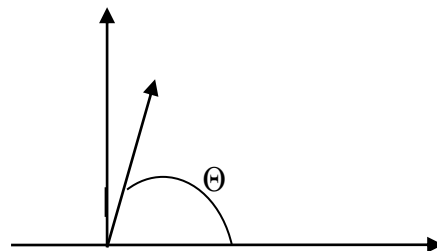


$$Z = \sqrt{50} \angle -0.1418 \text{ rads.}$$

$$b) Z = Z_4 - Z_3 = \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{7}i\right) - (-2 - 7i) = \frac{7}{3} + \frac{53}{7}i$$

$$|Z| = \sqrt{\left(\frac{7}{3}\right)^2 + \left(\frac{53}{7}\right)^2} = 7.92$$

$$\Theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\frac{53}{7}}{\frac{7}{3}}\right) = 1.2718 \text{ rads.} = 72.87^\circ$$



Forma polar:

$$Z = 7.92 \angle 1.2718 \text{ rads}$$

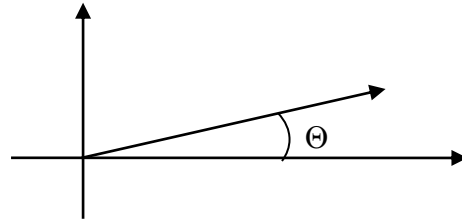
$$c) Z = 3Z_1 - Z_3 = 11 + 13i$$

$$|Z| = \sqrt{(11)^2 + (13)^2} = 17.02$$

$$\Theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{13}{11}\right) = 0.8685 \text{ rads} = 49.76^\circ$$

Forma polar:

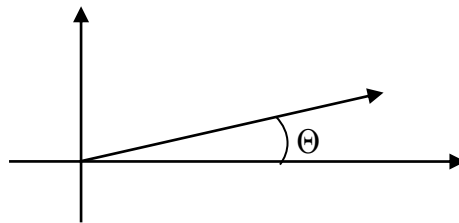
$$Z = 17.02 \angle 0.8685 \text{ rads}$$



$$d) \quad Z = Z_2 Z_4 = \frac{64}{21} + \frac{9}{7}i$$

$$|Z| = \sqrt{\left(\frac{64}{21}\right)^2 + \left(\frac{9}{7}\right)^2} = 3.30$$

$$\Theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\frac{9}{7}}{\frac{64}{21}}\right) = 0.3992 \text{ rads} = 21.76^\circ$$



Forma polar:

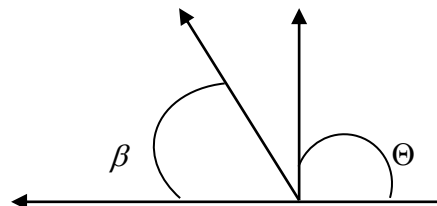
$$Z = 3.3077 \angle 0.3992 \text{ rads}$$

$$e) \quad Z = \frac{Z_1}{Z_3} = -\frac{20}{53} + \frac{17}{53}i$$

$$|Z| = \sqrt{\left(-\frac{20}{53}\right)^2 + \left(\frac{17}{53}\right)^2} = 0.4952$$

$$\beta = \operatorname{tg}^{-1}\left(-\frac{\frac{17}{53}}{\frac{20}{53}}\right) = -40.90^\circ = -0.8663 \text{ rads}$$

$$\Theta = 180 - 40.90 = 139.1^\circ = 2.42 \text{ rads}$$



Forma polar:

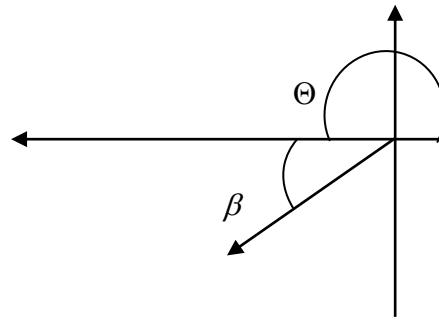
$$Z = 0.4952 \angle 2.42 \text{ rads}$$

$$f) \quad Z = \frac{Z_3}{Z_4} + Z_1 = -\frac{1479}{193} - \frac{139}{193}i$$

$$|Z| = \sqrt{\left(-\frac{1479}{193}\right)^2 + \left(-\frac{139}{193}\right)^2} = 7.696$$

$$\beta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\frac{139}{193}}{\frac{1479}{193}}\right) = 0.093 \text{ rads} = 5.36^\circ$$

$$\Theta = 180 + 5.36 = 185.36^\circ = 3.23 \text{ rads}$$



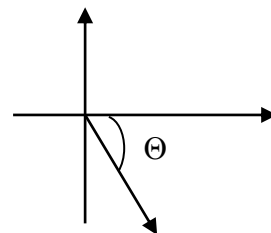
Forma polar:

$$Z = 7.69 \angle 3.23 \text{ rads}$$

$$g) \quad Z = (Z_1 * Z_3) - Z_2 = 4 - 22i$$

$$|Z| = \sqrt{(4)^2 + (22)^2} = 22.360$$

$$\Theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(-\frac{22}{4}\right) = -1.390 \text{ rads} = -79.69^\circ$$



Forma polar:

$$Z = 22.36 \angle -1.390 \text{ rads}$$

1.2 EJERCICIOS. Realice las siguientes operaciones con los números complejos que se dan a continuación y exprese sus resultados en forma rectangular y polar.

$$a) \frac{Z_1}{Z_3}$$

$$b) Z_2 + Z_4$$

$$c) -Z_6 - Z_2$$

$$d) Z_2 + Z_3$$

$$e) Z_4 Z_6$$

$$f) Z_1 Z_5$$

$$g) \frac{Z_6}{Z_4}$$

Donde :

$$Z_1 = 3 - 2i$$

$$Z_2 = 4 + 5i$$

$$Z_3 = 6 + 2i$$

$$Z_4 = 1 - 5i$$

$$Z_5 = -2 - i$$

$$Z_6 = -\frac{1}{8} + 3i$$

RESPUESTAS:

Forma rectangular:

$$a) Z = \frac{7}{20} - \frac{9}{20}i$$

$$c) Z = -\frac{31}{8} - 8i$$

$$e) = \frac{119}{8} + \frac{29}{8}i$$

$$g) = -\frac{121}{208} + \frac{19}{208}i$$

Forma Polar

$$a) Z = 0.57 \angle -0.909 \text{ rads}$$

$$c) Z = 8.88 \angle 4.2613 \text{ rads.}$$

$$e) Z = 15.31 \angle 0.2390 \text{ rads.}$$

$$g) Z = 0.58 \angle 2.9858 \text{ rads.}$$

1.3 POTENCIA REAL DE UN NÚMERO COMPLEJO

TEOREMA DE DE MOIVRE

La potencia enésima de $w = [|w|(Cos\Theta + iSen\Theta)]$, está dada por:

$$Z = w^n = [|w|(Cos\Theta + iSen\Theta)]^n = |w|^n (Cos\ n\ \Theta + iSen\ n\ \Theta).$$

Y se verifica para todo valor real de la Exponente n

En el caso de un exponente racional de la forma $1/n$, se tiene:

$$w^{\frac{1}{n}} = (a + ib)^{\frac{1}{n}} = \left[|w|^{\frac{1}{n}} (Cos\ \Theta + i Sen\ \Theta) \right]^{\frac{1}{n}} = |w|^{\frac{1}{n}} (Cos\ \frac{\Theta}{n} + i Sen\ \frac{\Theta}{n})$$

Donde:

$$|w| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$$

y

$$\Theta = tg^{-1}\left(\frac{b_1}{a_1}\right)$$

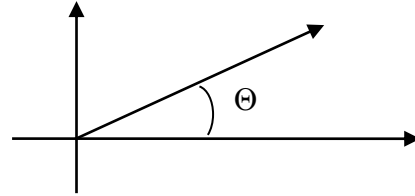
1.3 EJEMPLOS. Calcule las potencias que se indican con los números complejos que se dan a continuación.

a) $Z = (1 + i)^{29}$

$$|Z| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\Theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = 0.7853 = 45^\circ$$

$$w = \sqrt{2}; \quad \curvearrowright \quad 0.7853 \text{ rads}$$



$$Z = \left[\sqrt{2} [\cos(0.7853) + i \operatorname{Sen}(0.7853)] \right]^{29}$$

$$Z = 2^{\frac{29}{2}} [\cos(0.7853)(29) + i \operatorname{Sen}(0.7853)(29)]$$

$$Z = 2^{\frac{29}{2}} [\cos(22.773) + i \operatorname{Sen}(22.773)]$$

$$Z = 2^{\frac{29}{2}} (-0.7096 - i0.7096)$$

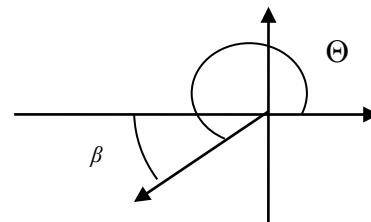
$$Z = -16441.76(1 + i)$$

b) $Z = (-1 - i)^{36}$

$$|w| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\beta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{-1}{-1}\right) = 0.7853 \text{ rads} = 45^\circ$$

$$\Theta = 180 + 45^\circ = 3.92 \text{ rads} = 225^\circ$$



$$Z = \left[\sqrt{2} [\cos(0.7853) + i \operatorname{Sen}(0.7853)] \right]^{36}$$

$$Z = 2^{\frac{36}{2}} [\cos(0.7853)(36) + i \operatorname{Sen}(0.7853)(36)]$$

$$Z = 2^{\frac{36}{2}} [\cos(28.281) + i \operatorname{Sen}(28.28)]$$

$$Z = 2^{\frac{36}{2}} (-0.999 - i5.66 \times 10^{-3})$$

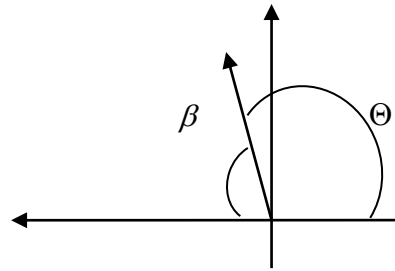
$$Z = -26188.856 - 1483.73i$$

$$c) Z = (-1 + 17i)^{17}$$

$$|Z| = \sqrt{(-1)^2 + (17)^2} = \sqrt{290}$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(-\frac{17}{1}\right) = -1.51 \text{ rads} = -86.51^\circ$$

$$\Theta = 180 - 86.51 = 93.49^\circ = 1.63 \text{ rads.}$$



$$Z = \left[\sqrt{290} [\cos(1.63) + i \sin(1.63)] \right]^{17}$$

$$Z = \left[290^{\frac{17}{2}} (\cos(1.63)(17) + i \sin(1.63)(17)) \right]$$

$$Z = 290^{\frac{17}{2}} (\cos(27.71) + i \sin(27.71))$$

$$Z = 290^{\frac{17}{2}} (-0.8444 + i0.5348)$$

$$Z = -7.193 \times 10^{20} + 4.555 \times 10^{20} i$$

$$d) Z = (\sqrt{3} + i)^{15}$$

$$|Z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\Theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0.5235 \text{ rads} = 30^\circ$$

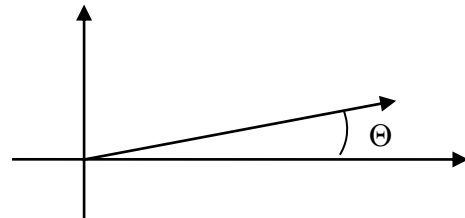
$$Z = [2(\cos(0.5235) + i \sin(0.5235))]^{15}$$

$$Z = [2^{15} (\cos(0.5235)(15) + i \sin(0.5235)(15))]^{15}$$

$$Z = 2^{15} (\cos(7.8525) + i \sin(7.8525))$$

$$Z = 2^{15} (1.481 \times 10^{-3} + 0.999i)$$

$$Z = 48.529 + 32735.232i$$



$$e) Z = (2 + 2i)^{12}$$

$$|Z| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$\Theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2}{2}\right) = 0.7853 \text{ rads} = 45^\circ$$

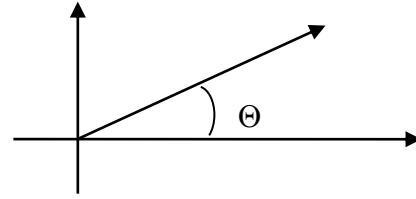
$$Z = \left[\sqrt{8} [(\cos(0.7853) + i \sin(0.7853))] \right]^{12}$$

$$Z = \left[8^6 (\cos(0.7853)(12) + i \sin(0.7853)(12)) \right]$$

$$Z = 8^6 [\cos(9.423) + i \sin(9.423)]$$

$$Z = 8^6 (-0.999 + i 1.77 \times 10^{-3})$$

$$Z = -261881.8 + 463.99i$$

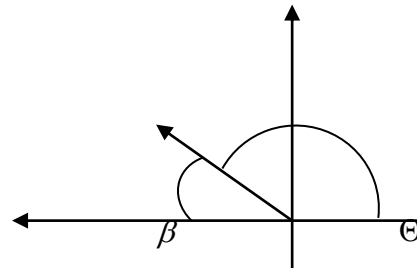


$$f) Z = (-6 + 5i)^9$$

$$|Z| = \sqrt{(-6)^2 + (5)^2} = \sqrt{36+25} = \sqrt{61}$$

$$\beta = \operatorname{tg}^{-1}\left(-\frac{5}{6}\right) = -0.6947 \text{ rads} = -39.80^\circ$$

$$\Theta = 180 - 39.80 = 140.2^\circ = 2.447 \text{ rads}$$



$$Z = \left[\sqrt{61} (-\cos[0.6947] + i \sin(0.6947)) \right]^9$$

$$Z = \left[61^{\frac{9}{2}} (\cos(2.447)(9) + i \sin(2.447)(9)) \right]$$

$$Z = 61^{\frac{9}{2}} (-0.999 - 0.03184i)$$

$$Z = 61^{\frac{9}{2}} (-0.1804 - 0.9835i)$$

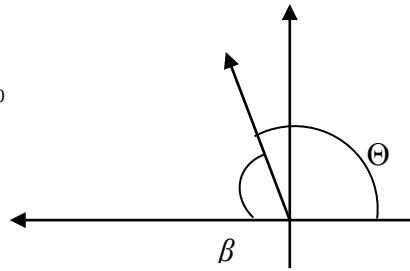
$$Z = -19508361.32 - 106355173.8i$$

$$g) Z = (-\sqrt{7} + 3i)^{18}$$

$$|w| = \sqrt{-\sqrt{(7)^2 + (3)^2}} = \sqrt{7+9} = \sqrt{16}$$

$$\beta = \operatorname{tg}^{-1}\left(-\frac{3}{\sqrt{7}}\right) = -1.1302 \text{ rads} = -64.76^\circ$$

$$\Theta = 3.14159 - 1.1302 = 2.01139 \text{ rads}$$



$$Z = \left[\sqrt{2} (\cos(2.01139) + i \sin(2.01139)) \right]^{18}$$

$$Z = \left[2^9 (\cos(2.1139)(18) + i \sin(2.1139)(18)) \right]$$

$$Z = \left[2^9 (\cos(36.205) + i \sin(36.205)) \right]$$

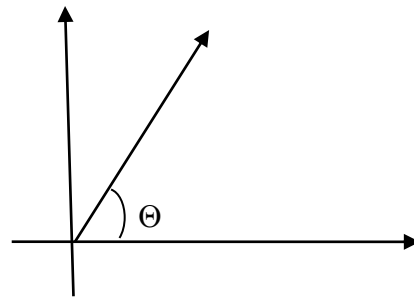
$$Z = 2^9 (0.8069 + i0.63209)$$

$$Z = 413.132 + 323.633i$$

$$h) Z = \left(\frac{4}{7} + \frac{4}{9}i \right)^6$$

$$|Z| = \sqrt{\left(\frac{4}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^2} = 0.723$$

$$\Theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\frac{4}{9}}{\frac{4}{7}}\right) = 0.6610 \text{ rads} = 33.46^\circ$$



$$Z = \left[0.723 (\cos(0.6610) + i \sin(0.6610)) \right]^6$$

$$Z = \left[0.723^6 (\cos(0.6610)(6) + i \sin(0.6610)(6)) \right]$$

$$Z = 1.605^6 (\cos(3.966) + i \sin(3.966))$$

$$Z = 1.605^6 (4.73 + i3.683)$$

$$Z = 0.6756 + 0.5260i$$

1.3 EJERCICIOS. Calcule las potencias que se indican con los números complejos que se dan a continuación.

RESPUESTAS

1) $Z = \left(8 - \frac{3}{2}i\right)^{25}$

1) $Z = -4.6435 \times 10^{21} + 5.8 \times 10^{22} i$

2) $Z = \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{8}i\right)^{18}$

3) $Z = -342.82 + 118.02 i$

3) $Z = \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}i\right)^{10}$

5) $Z = 8.59556 \times 10^{21} + 5.244 \times 10^{21} i$

4) $Z = \left(\frac{1}{\sqrt{7}} - i\right)^{15}$

7) $Z = 54.03 + 296.97 i$

5) $Z = \left(10 + \frac{1}{4}i\right)^{22}$

9) $Z = 1225.488 + 489.454 i$

6) $Z = \left(\frac{\sqrt{10}}{2} - 2i\right)^8$

7) $Z = (6 + 3i)^3$

8) $Z = \left(\frac{1}{2} + 4i\right)^{\frac{5}{7}}$

9) $Z = \left(\frac{4}{7} - 6i\right)^4$

10) $Z = (8 + 2i)^{\frac{2}{\sqrt{3}}}$

1.4 RAICES DE UN NÚMERO COMPLEJO

El teorema de De Moivre también puede utilizarse para encontrar las raíces de un número complejo. Si z es una raíz n -ésima del número complejo w , a partir de:

$$Z^n = w.$$

Para encontrar z , se tiene:

$$Z = |Z|(\cos \Theta + i \operatorname{Sen} \Theta) \quad \text{y} \quad w = |w|(\cos \Phi + i \operatorname{Sen} \Phi)$$

Donde $\Theta = \arg Z$ y $\Phi = \arg w$. De tal forma que con el teorema De Moivre se tiene:

$$|Z|^n = (\cos n\Theta + i \operatorname{Sen} n\Theta) = |w|(\cos \Phi + i \operatorname{Sen} \Phi).$$

Así, se puede tomar:

$$|Z| = |w|^{\frac{1}{n}}$$

y

$$\Theta = \frac{1}{n} \arg w = \frac{1}{n} (\operatorname{Arg} w + 2\pi k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

Aunque la ecuación proporciona un número infinito de valores para Θ , sólo se obtienen n ángulos polares diferentes, ya que:

$$\frac{2\pi(k+n)}{n} = \frac{2\pi k}{n} + 2\pi,$$

Ya que los ángulos polares se repiten cada n enteros. Por lo tanto, se limitará la atención en los ángulos n -polares

$$\Theta = \frac{1}{n} (\operatorname{Arg} w + 2\pi k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

1.4 EJEMPLOS. Calcule las raíces de los siguientes números complejos, por medio del teorema de De MOIVRE.

a) $Z = (1 + 2i)^{1/2}$

$$|w| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$$

$$\Theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2}{1}\right) = 1.107 \text{ rads.} = 63.42^\circ$$

$$Z = (\sqrt{5})^{1/2} \left[\cos \frac{1}{2}(1.107 + 2\pi k) + i \operatorname{sen} \frac{1}{2}(1.107 + 2\pi k) \right]$$

para $k = 0$:

$$Z_0 = (\sqrt{5})^{1/2} \left[\cos \frac{1}{2}(1.107) + i \operatorname{sen} \frac{1}{2}(1.107) \right]$$

$$Z_0 = 1.2720 + i0.7860$$

para $k = 1$:

$$Z_1 = (\sqrt{5})^{1/2} \left[\cos \frac{1}{2}(1.107 + 2\pi) + i \operatorname{sen} \frac{1}{2}(1.107 + 2\pi) \right]$$

$$Z_1 = (\sqrt{5})^{1/2} [-0.8506 - i 0.5256]$$

$$Z_1 = -1.2719 - i 0.7860$$

b) $Z = (5 + 9i)^{1/3}$

$$|w| = \sqrt{(5)^2 + (9)^2} = \sqrt{106}$$

$$\Theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{9}{5}\right) = 1.063 \text{ rads.} = 60.90^\circ$$

$$Z = (\sqrt{106})^{1/3} \left[\cos \frac{1}{3}(1.063 + 2\pi k) + i \operatorname{sen} \frac{1}{3}(1.063 + 2\pi k) \right]$$

para $k = 0$:

$$Z_0 = (\sqrt{106})^{1/3} \left[\cos \frac{1}{3}(1.063) + i \operatorname{sen} \frac{1}{3}(1.063) \right]$$

$$Z_0 = 2.0403 + i 0.7548$$

para $k = 1$:

$$Z_1 = (\sqrt{106})^{1/3} \left[\cos \frac{1}{3}(1.063 + 2\pi) + i \operatorname{sen} \frac{1}{3}(1.063 + 2\pi) \right]$$

$$Z_1 = -1.6738 + i 1.3895$$

para $k = 2$:

$$Z_2 = (\sqrt{106})^{1/3} \left[\cos \frac{1}{3}(1.063 + 4\pi) + i \operatorname{sen} \frac{1}{3}(1.063 + 4\pi) \right]$$

$$Z_2 = -0.366 - i 2.144$$

$$c) \quad Z = \left(\frac{3}{7} - 6i\right)^{1/4}$$

$$|w| = \sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2 + (6)^2} = \sqrt{36.18}$$

$$\Theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(-\frac{6}{\frac{3}{7}}\right) = -1.499 \text{ rads.} = -85.91^\circ$$

$$Z = \left(\sqrt{36.18}\right)^{1/4} \left[\cos \frac{1}{4}(-1.499 + 2\pi k) + i \sin \frac{1}{4}(-1.499 + 2\pi k) \right]$$

para $k = 0$:

$$Z_0 = \left(\sqrt{36.18}\right)^{1/4} \left[\cos \frac{1}{4}(-1.499) + i \sin \frac{1}{4}(-1.499) \right]$$

$$Z_0 = \left(\sqrt{36.18}\right)^{1/4} [0.9305 - i 0.366]$$

$$Z_0 = 1.4572 - i 0.5731$$

para $k = 1$:

$$Z_1 = \left(\sqrt{36.18}\right)^{1/4} \left[\cos \frac{1}{4}(-1.499 + 2\pi) + i \sin \frac{1}{4}(-1.499 + 2\pi) \right]$$

$$Z_1 = \left(\sqrt{36.18}\right)^{1/4} [0.9965 - i 0.00145]$$

$$Z_1 = 1.56057 - i 0.00227$$

para $k = 2$:

$$Z_2 = \left(\sqrt{36.18}\right)^{1/4} \left[\cos \frac{1}{4}(-1.499 + 4\pi) + i \sin \frac{1}{4}(-1.499 + 4\pi) \right]$$

$$Z_2 = \left(\sqrt{36.18}\right)^{1/4} [-0.9305 + i 0.3660]$$

$$Z_2 = -1.4572 + i 0.5731$$

para $k = 3$:

$$Z_3 = \left(\sqrt{36.18}\right)^{1/4} \left[\cos \frac{1}{4}(-1.499 + 6\pi) + i \sin \frac{1}{4}(-1.499 + 6\pi) \right]$$

$$Z_3 = \left(\sqrt{36.18}\right)^{1/4} [-0.3660 - i 0.9305]$$

$$Z_3 = -0.5731 + i 1.4572$$

$$d) \quad Z = \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{4}i\right)^{1/3}$$

$$|w| = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{6.81}$$

$$\Theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{2}}\right) = 0.2914 \text{ rads.} = 16.69^\circ$$

$$Z = \left(\sqrt{6.81}\right)^{1/3} \left[\cos \frac{1}{3}(0.2914 + 2\pi k) + i \sin \frac{1}{3}(0.2914 + 2\pi k) \right]$$

para $k = 0$:

$$Z_0 = \left(\sqrt{6.81}\right)^{1/3} \left[\cos \frac{1}{3}(0.2914) + i \sin \frac{1}{3}(0.2914) \right]$$

$$Z_0 = \left(\sqrt{6.81}\right)^{1/3} [1.3702 + i 0.1335]$$

para $k = 1$:

$$Z_1 = \left(\sqrt{6.81}\right)^{1/3} \left[\cos \frac{1}{3}(0.2914 + 2\pi) + i \sin \frac{1}{3}(0.2914 + 2\pi) \right]$$

$$Z_1 = -0.800 + i 1.119$$

para $k = 2$:

$$Z_2 = \left(\sqrt{6.81}\right)^{1/3} \left[\cos \frac{1}{3}(0.2914 + 4\pi) + i \sin \frac{1}{3}(0.2914 + 4\pi) \right]$$

$$Z_2 = -0.5695 - i 1.2534$$

$$e) \quad Z = (8 + 7i)^{1/4}$$

$$|w| = \sqrt{(8)^2 + (7)^2} = \sqrt{113}$$

$$\Theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{7}{8}\right) = 0.7188 \text{ rads.} = 41.185^\circ$$

$$Z = \left(\sqrt{113}\right)^{1/4} \left[\cos \frac{1}{4}(0.7188 + 2\pi k) + i \sin \frac{1}{4}(0.7188 + 2\pi k) \right]$$

para $k = 0$:

$$Z_0 = \left(\sqrt{113}\right)^{1/4} \left[\cos \frac{1}{4}(0.7188) + i \sin \frac{1}{4}(0.7188) \right]$$

$$Z_0 = 1.776 + i 3.227$$

para $k = 1$:

$$Z_1 = \left(\sqrt{113}\right)^{1/4} \left[\cos \frac{1}{4}(0.7188 + 2\pi) + i \sin \frac{1}{4}(0.7188 + 2\pi) \right]$$

$$Z_1 = -0.3227 + i 1.776$$

para $k = 2$:

$$Z_2 = \left(\sqrt{113}\right)^{1/4} \left[\cos \frac{1}{4}(0.7188 + 4\pi) + i \sin \frac{1}{4}(0.7188 + 4\pi) \right]$$

$$Z_2 = -1.776 - i 0.3227$$

para $k = 3$:

$$Z_3 = \left(\sqrt{113}\right)^{1/4} \left[\cos \frac{1}{4}(0.7188 + 6\pi) + i \sin \frac{1}{4}(0.7188 + 6\pi) \right]$$

$$Z_3 = 0.3227 - i 1.7765$$

1.4 EJERCICIOS. Calcule las raíces de los siguientes números complejos, por medio del teorema de De Moivre.

RESPUESTAS

1) $Z = (1 + i)^{1/2}$

1) $Z_0 = 1.0985 + i 0.4549$
 $Z_1 = -1.0985 - i 0.4549$

2) $Z = (-5 - 2i)^{1/3}$

$$Z_0 = 1.4521 + i 0.4919$$

3) $Z = (2 - 3i)^{1/3}$

3) $Z_1 = -0.241 + i 1.5036$
 $Z_2 = -1.1521 - i 1.0115$

4) $Z = \left(\frac{7}{4} - \frac{5}{2}i\right)^{1/3}$

$$Z_0 = 1.2568 + i 0.4270$$

5) $Z = \left(\frac{4}{5} + 3i\right)^{1/4}$

5) $Z_1 = -0.4270 + i 1.2568$
 $Z_2 = -1.2568 - i 0.4270$
 $Z_3 = 0.4270 - i 1.2568$

6) $Z = \left(7 + \frac{3}{2}i\right)^{1/4}$

1.5 LOGARITMO COMPLEJO

La exponencial compleja esta definida por:

$$\begin{aligned}e^z &= e^{x+iy} = e^x e^{iy} \\ &= e^x (\cos y + i \operatorname{Sen} y)\end{aligned}$$

Es una función entera con valor diferente de cero que satisface a la ecuación diferencial.

$$f'(z) = f(z), \quad f(0) = 1$$

De donde $e^z \neq 0$ se sigue de que ni e^x ni $\cos y + i \operatorname{Sen} y$ se anulan. Además observe que como $z = x + iy$, la notación conduce a:

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{Sen} y \quad |e^{iy}| = 1$$

Si $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ Entonces las fórmulas trigonométricas para las sumas implican que:

$$\begin{aligned}e^{z_1} e^{z_2} &= e^{x_1} e^{x_2} (\cos y_1 + i \operatorname{Sen} y_1) (\cos y_2 + i \operatorname{Sen} y_2) \\ &= e^{x_1+x_2} [(\cos y_1 \cos y_2 - \operatorname{Sen} y_1 \operatorname{Sen} y_2)] + i[(\operatorname{Sen} y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \operatorname{Sen} y_2)] \\ &= e^{x_1+x_2} [\cos(y_1 + y_2) + i \operatorname{Sen}(y_1 + y_2)] \\ &= e^{x_1+x_2} e^{i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}\end{aligned}$$

Como $e^z : \ell \rightarrow \Re$ es uno a uno como la superficie de Reimann, se puede definir su función inversa que mapea $\Re$ en ℓ . Limitando el caso real, se llama a este mapeo inverso logaritmo y se denota por

$$\log z : \Re \rightarrow \ell$$

Como la exponencial compleja y el logaritmo son funciones inversas, se tiene que:

$$\begin{aligned}\log e^z &= z, \quad \text{para todo } z \text{ en } \ell \\ y \\ e^{\log z} &= z, \quad \text{para todo } z \text{ en } \Re\end{aligned}$$

La única tarea pendiente es obtener una expresión para $\text{Log } z$ en términos de funciones conocidas.

La representación polar y la naturaleza inversa de las funciones logaritmo y exponencial proporcionan una definición natural para el logaritmo complejo:

$$\begin{aligned}\log z &= \log(|z| e^{i \arg z}) = \log(e^{\log|z| + i \arg z}) \\ &= \log |z| + i \arg z,\end{aligned}$$

Donde $\log |z|$ es el logaritmo natural del cálculo elemental.

Con estos conceptos, no es difícil verificar que $\log |z|$ es continua ya que:

$$\begin{aligned}\log |z| - \log |w| &= \log |z| + i \arg z - \log |w| - i \arg w \\ &= [\log |z| - \log |w|] + i[\arg z - \arg w],\end{aligned}$$

Y el logaritmo natural y a función argumento son continuas.

TEOREMA: *la función $\log |z| + i \arg z$ es analítica para todo z en $\Re$*

El logaritmo complejo tiene las propiedades usuales de un logaritmo:

$$\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2,$$

$$\log \frac{z_1}{z_2} = \log z_1 - \log z_2.$$

Note que en estas dos identidades suponemos que z_1, z_2 son puntos de la superficie de Riemann

1.5 EJEMPLOS. Realice las siguientes operaciones con los complejos dados

$$\begin{aligned} 1) \quad & \text{Ln} \left| -5 + \frac{3}{2}i \right| \\ & \left| -5 + \frac{3}{2}i \right| = \sqrt{(-5)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{27.25} \\ & \arg \left(-5 + \frac{3}{2}i \right) = \text{tg}^{-1} \left(-\frac{\frac{3}{2}}{5} \right) = -0.291 \\ & \quad -0.291 + \pi = 2.850 \text{ rads} \\ & \text{Ln} \left| -5 + \frac{3}{2}i \right| = \sqrt{27.25} + i \, 2.850 \end{aligned}$$

Debido a que el vector se encuentra en el 2º cuadrante, se debe sumar 180º o π rads

$$\begin{aligned} 2) \quad & \text{Ln} \left| \frac{4}{3} + \frac{7}{4}i \right| \\ & \left| \frac{4}{3} + \frac{7}{4}i \right| = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{7}{4}\right)^2} = \sqrt{4.840} \\ & \arg \left(\frac{4}{3} + \frac{7}{4}i \right) = \text{tg}^{-1} \left(\frac{\frac{7}{4}}{\frac{4}{3}} \right) = 0.919 \text{ rads} \\ & \text{Ln} \left| \frac{4}{3} + \frac{7}{4}i \right| = \sqrt{4.840} + i \, 0.919 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad & \text{Ln} |6 - 5i| \\ & |6 - 5i| = \sqrt{(6)^2 + (-5)^2} = \sqrt{61} \\ & \arg (6 - 5i) = \text{tg}^{-1} \left(-\frac{5}{6} \right) = -0.694 \text{ rads} \end{aligned}$$

Debido a que el vector se encuentra en el 4º cuadrante, y a pesar de que el ángulo sea negativo, éste se mide con respecto al eje de los reales positivos.

$$\begin{aligned}
4) \quad & \operatorname{Ln} \left| -\frac{2}{5} - 6i \right| \\
& \left| -\frac{2}{5} - 6i \right| = \sqrt{\left(-\frac{2}{5}\right)^2 + (-6)^2} = \sqrt{36.16} \\
& \arg \left(-\frac{2}{5} - 6i \right) = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{-6}{-\frac{2}{5}} \right) = 1.50 \\
& 180 + 85.94 = 265.94^\circ = 4.64 \text{ rads} \\
& \operatorname{Ln} \left| -\frac{2}{5} - 6i \right| = \sqrt{36.16} + i 4.64
\end{aligned}$$

Nota : debido a que el vector se encuentra en el 3^o cuadrante, se le tienen que aumentar 180^o o π rads

$$\begin{aligned}
5) \quad & \operatorname{Ln} |3+8i| \\
& |3+8i| = \sqrt{(3)^2 + (8)^2} = \sqrt{73} \\
& \arg (3+8i) = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{8}{3} \right) = 1.21 \text{ rads} \\
& \operatorname{Ln} |3+8i| = \sqrt{73} + i 1.21
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6) \quad & e^{(3-4i)} = e^3 e^{-4i} \\
& = e^3 (\cos 4 - i \operatorname{Sen} 4) \\
& = e^3 \cos 4 - i e^3 \operatorname{Sen} 4 \\
& = -13.28 - (-15.20)i \\
& = -13.28 + i 15.20
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7) \quad e^{(-2+\frac{1}{5}i)} &= e^{-2} * e^{\frac{1}{5}i} \\
 &= e^{-2} \left(\cos \frac{1}{5} + i \sin \frac{1}{5} \right) \\
 &= e^{-2} \cos \frac{1}{5} + e^{-2} i \sin \frac{1}{5} \\
 &= 0.132 + i 0.026
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8) \quad e^{(-\frac{5}{2}+\frac{2}{8}i)} &= e^{-\frac{5}{2}} * e^{-\frac{2}{8}i} \\
 &= e^{-\frac{5}{2}} \left(\cos \frac{2}{8} - i \sin \frac{2}{8} \right) \\
 &= e^{-\frac{5}{2}} \cos \frac{2}{8} + e^{-\frac{5}{2}} i \sin \frac{2}{8} \\
 &= 0.079 - i 0.020
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9) \quad e^{(3+9i)} &= e^3 * e^{9i} \\
 &= e^3 (\cos 9 + i \sin 9) \\
 &= e^3 \cos 9 + i e^3 \sin 9 \\
 &= -18.30 + i 8.277
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10) \quad e^{(-\frac{2}{3}+i)} &= e^{-\frac{2}{3}} * e^i \\
 &= e^{-\frac{2}{3}} (\cos 1 + i \sin 1) \\
 &= e^{-\frac{2}{3}} \cos 1 + e^{-\frac{2}{3}} i \sin 1 \\
 &= 0.277 + i 0.432
 \end{aligned}$$

1.6 EXPONENCIAL COMPLEJA

Las funciones exponenciales y logaritmo compleja se pueden usar para definir las funciones potencias.

Definición:

Sea: $z^a = e^{a \log z}$, a complejo $\neq 0$

La función $z^z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es analítica y uno a uno porque la composición de funciones de esos tipos. Por regla de la cadena.

$$(z^a)' = e^{a \log z} * \frac{a}{z} = a z^{a-1}$$

El valor principal de la función potencia esta dado por:

$$z^a = e^{a \log z}$$

A menudo existe el interés en el caso en donde son enteros positivos factores comunes. Considere ahora el conjunto de números $e^{\log(z) + 2\pi\Re i}$, $\Re = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, esto es que aquellos puntos en $\mathbb{R}$ situados directamente arriba y abajo del punto $e^{\log}$. Entonces $(e^{\log(z) + 2\pi\Re i})^{m/n} = e^{(m/n)\log z} e^{(m/n)2\pi\Re i}$ y si se escribe $\Re = pn + q$ con p y q enteros, $0 \leq q < n$, se tiene:

$$e^{(m/n)2\pi\Re i} = e^{2\pi p m i} e^{2\pi q m n / n} = e^{2\pi q m / n},$$

De tal forma que hay únicamente n respuestas con valores complejos diferentes. Así el mapeo $z^{m/n} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ conduce a cada n copias de $\ell - \{0\}$ a una copia de $\ell - \{0\}$ y se repite a partir de ahí. Este hecho permite simplificar el modelo usado para describir el mapeo $w = z^{m/n}$. Para simplificar suponga que $m=1$. Entonces,

$$w = z^{1/n} = e^{(1/n)\log z} e^{2\pi i q / n}, \quad q = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Puede visualizarse como un mapeo de $[\ell - \{0\}]^n$ en $[\ell - \{0\}]$, donde $[\ell - \{0\}]^n$ consiste en n copias de $\ell - \{0\}$ pegadas una después de la otra a lo largo del eje real negativo, como en $\mathbb{R}$ excepto que el bordaje superior de la rama de arriba de pega al borde inferior de la rama de abajo.

1.6 EJEMPLOS. Calcule la exponencial compleja de los siguientes números complejos.

$$1) \quad i^i = e^{Ln(0+i)^{(0+i)}} = e^{(0+i)Ln(1+0i)}$$

Donde :

$$Ln|0+i| = |i| + i \arg(0+i) = \sqrt{0^2+1^2} + tg^{-1}\left(\frac{1}{0}\right)$$

$$Ln|0+i| = 1 + i \frac{\pi}{2}$$

Entonces :

$$\begin{aligned} e^{(0+i)(1+i\frac{\pi}{2})} &= e^{-\frac{\pi}{2}+i} = e^{-\frac{\pi}{2}}(\cos 1 + i \operatorname{sen} 1) \\ &= 0.1123 + i 0.1749 \end{aligned}$$

$$2) \quad (5-3i)^{(1+2i)} = e^{Ln(5-3i)^{(1+2i)}}$$

Donde :

$$\begin{aligned} Ln|5-3i| &= \sqrt{(5)^2 + (-3)^2} + i \operatorname{tg}^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right) \\ &= 5.83 - i 0.54 \end{aligned}$$

Entonces :

$$\begin{aligned} e^{(1+2i)(5.83-i0.54)} &= e^{(6.91+i11.12)} \\ e^{6.91} e^{i11.12} &= e^{6.91}(\cos 11.12 + i \operatorname{sen} 11.12) \\ &= 124.38 - i 994.49 \end{aligned}$$

$$3) \quad \left(1 + \frac{4}{3}i\right)^{-i} = e^{Ln(1-\frac{4}{3}i)^{-i}} = e^{-i Ln(1-\frac{4}{3}i)}$$

Donde :

$$\begin{aligned} Ln|1 + \frac{4}{3}i| &= \sqrt{(1)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} + i \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \\ &= 1.66 + i 0.9272 \end{aligned}$$

Entonces :

$$\begin{aligned} e^{-i(1.66+i 0.9272)} &= e^{(-i 1.66+0.9272)} \\ e^{-i 1.66} * e^{0.9272} &= e^{0.9272}(\cos 1.66 - i \operatorname{sen} 1.66) \\ &= -0.2360 - i 2.5163 \end{aligned}$$

$$4) \left(\frac{1}{4} + i\sqrt{2}\right)^{\left(-1 + \frac{3}{4}i\right)} = e^{Ln\left(\frac{1}{4} + i\sqrt{2}\right)^{\left(-1 + \frac{3}{4}i\right)}} = e^{\left(-1 + \frac{3}{4}\right)Ln\left(\frac{1}{4} + i\sqrt{2}\right)}$$

Donde:

$$Ln\left|\frac{1}{4} + i\sqrt{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} + i \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{2}}\right) \\ = 1.435 + i 1.39$$

Entonces:

$$e^{\left(-1 + \frac{3}{4}\right)(1.435 + i 1.39)} = e^{(-2.47 - i 0.32)} \\ e^{-2.47} * e^{-i 0.32} = e^{-2.47} (\operatorname{Cos} 0.32 - i \operatorname{Sen} 0.32) \\ = 0.080 - i 0.026$$

$$5) \left(-\frac{1}{3} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{5}i\right)} = e^{Ln\left(-\frac{1}{3} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{5}i\right)}} = e^{\left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{5}\right)Ln\left(-\frac{1}{3} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

Donde:

$$Ln\left|-\frac{1}{3} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + i \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{3}}\right) \\ = 0.611 + i 1.130$$

Entonces:

$$e^{\left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{5}\right)(0.611 + i 1.130)} = e^{(0.3725 - i 0.9316)} \\ e^{0.3725} * e^{-i 0.9316} = e^{0.3725} (\operatorname{Cos} 0.9316 - i \operatorname{Sen} 0.9316) \\ = 0.8658 - i 1.164$$

$$6) \left(\frac{1}{\pi} + 3i\right)^{\left(4 - \frac{3}{2}i\right)} = e^{Ln\left(\frac{1}{\pi} + 3i\right)^{\left(4 - \frac{3}{2}i\right)}} = e^{\left(4 - \frac{3}{2}\right)Ln\left(\frac{1}{\pi} + 3i\right)}$$

Donde:

$$Ln\left|\frac{1}{\pi} + 3i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{\pi}\right)^2 + (3)^2} + i \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{3}{\frac{1}{\pi}}\right) \\ = 3.016 + i 1.4650$$

Entonces:

$$e^{\left(4 - \frac{3}{2}\right)(3.016 + i 1.4650)} = e^{(14.257 + i 1.34)} \\ e^{14.257} * e^{i 1.34} = e^{14.257} (\operatorname{Cos} 1.34 + i \operatorname{Sen} 1.34) \\ = 355715.5 + i 1513789.4$$

$$7) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + i\sqrt{3} \right)^{\left(\frac{1}{\pi} + i \right)} = e^{Ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + i\sqrt{3} \right)^{\left(\frac{1}{\pi} + i \right)}} = e^{\left(\frac{1}{\pi} + i \right) Ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + i\sqrt{3} \right)}$$

Donde :

$$Ln\left| \frac{1}{\sqrt{3}} + i\sqrt{3} \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\sqrt{3} \right)^2} + i \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \right)$$

$$= 1.825 + i 1.249$$

Entonces :

$$e^{\left(\frac{1}{\pi} + i \right) (1.825 + i 1.249)} = e^{(-0.669 + i 2.222)}$$

$$e^{-0.699} * e^{i 2.222} = e^{-0.699} (\operatorname{Cos} 2.222 + i \operatorname{Sen} 2.222)$$

$$= -0.310 + i 0.407$$

$$8) (-9 + 2i)^{(8+3i)} = e^{Ln(-9+2i)^{(8+3i)}} = e^{(8+3i) Ln(-9+2i)}$$

Donde :

$$Ln|-9 + 2i| = \sqrt{(-9)^2 + (2)^2} + i \operatorname{tg}^{-1}\left(-\frac{2}{9}\right)$$

$$= 9.219 + i 2.922$$

Entonces :

$$e^{(8+3i)(9.219 + i 2.922)} = e^{(64.98 + i 51.02)}$$

$$e^{64.98} * e^{i 51.02} = e^{64.98} (\operatorname{Cos} 51.02 + i \operatorname{Sen} 51.02)$$

$$= 1.210 \times 10^{28} + 1.37 \times 10^{28}$$

$$9) \left(-\pi - \frac{8}{7}i \right)^{(-3+i)} = e^{Ln\left(-\pi - \frac{8}{7}i \right)^{(-3+i)}} = e^{(-3+i) Ln\left(-\pi - \frac{8}{7}i \right)}$$

Donde :

$$Ln\left| -\pi - \frac{8}{7}i \right| = \sqrt{\left(-\pi \right)^2 + \left(-\frac{8}{7} \right)^2} + i \operatorname{tg}^{-1}\left(-\frac{\frac{8}{7}}{\pi} \right)$$

$$= 3.343 - i 3.48$$

Entonces :

$$e^{(-3+i)(3.343 - i 3.48)} = e^{(-6.81 + i 13.783)}$$

$$e^{-6.81} * e^{i 13.783} = e^{-6.81} (\operatorname{Cos} 13.783 + i \operatorname{Sen} 13.783)$$

$$= 3.82 \times 10^{-4} + 1.03 \times 10^{-3}$$

1.6 EJERCICIOS. Calcule la exponencial compleja de los siguientes números complejos.

$$1) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 3i \right)^{\left(-\frac{1}{5} + 2i \right)}$$

$$2) \left(-3 + \frac{2}{6}i \right)^{(4+3i)}$$

$$3) 7(42-i)^{(-6+2i)}$$

$$4) \left(\frac{\pi}{5} - \frac{3}{8}i \right)^{(-2+i)}$$

$$5) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4}i \right)^{(-2-3i)}$$

$$6) \left(\frac{4}{7} - \frac{1}{8}i \right)^{\left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{4}i \right)}$$

$$7) (-6+9i)^{\left(4 + \frac{1}{2}i \right)}$$

$$8) \left(-\frac{1}{\pi} - \frac{\sqrt{3}}{3}i \right)^{(2+6i)}$$

$$9) (-\pi - 7\pi i)^{(5+i)}$$

$$10) \left(\frac{1}{4\pi} - \sqrt{2} \right)^{(-2-i)}$$

RESPUESTAS

$$1) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 3i \right)^{\left(-\frac{1}{5} + 2i \right)} = 0.0343 - 0.0139i$$

$$3) (2-i)^{(-6+2i)} = 2.13 \times 10^{-6} + 3.112 \times 10^{-6}i$$

$$5) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4}i \right)^{(-2-3i)} = 1.25 + 0.2013i$$

$$7) (-6+9i)^{\left(4 + \frac{1}{2}i \right)} = 2.79 \times 10^{17} + 2.021 \times 10^{18}i$$

$$9) (-\pi - 7\pi i)^{(5+i)} = -1.923 \times 10^{47} - 3.56 \times 10^{47}i$$

2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

2.1 INTRODUCCION A LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

La ecuación general de una recta en $\mathbb{R}^2$ es de la forma:

$$ax + by = c$$

y la ecuación general de un plano en $\mathbb{R}^3$ es de la forma:

$$ax + by + cz = d$$

Las ecuaciones de esta forma se denominan **ecuaciones lineales**.

Definición: una **ecuación lineal** en las n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ es una ecuación que puede escribirse en la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

Donde los **coeficientes** a_n y el **término constante** b son constantes.

Sean, por ejemplo las siguientes ecuaciones lineales:

$$3x - 4y = -1, \quad r - \frac{1}{2}s - \frac{15}{3}t = 9, \quad x_1 + 5x_2 = 3 - x_3 + 2x_4$$

Observe que en la tercera ecuación es lineal porque puede reescribirse en la forma $x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 3$. También es importante advertir que, aunque estos son ejemplos (y que en la mayoría de las aplicaciones) los coeficientes y términos constantes son números reales, en algunos ejemplos y aplicaciones serán números complejos o miembros de Z_p para algún número primo p .

Las siguientes ecuaciones son ejemplos de ecuaciones no lineales:

$$xy + 2z = 1, \quad x_1^2 - x_2^3 = 3, \quad \frac{x}{y} + z = 2$$
$$\sqrt{2x} + \frac{\pi}{4}y - \text{Sen}\left(\frac{\pi}{5}z\right) = 1, \quad \text{Sen } x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0$$

De este modo, las ecuaciones lineales no contienen productos, recíprocos u otras funciones de las variables; éstas presentan únicamente a la primer potencia y están multiplicadas sólo por constantes.

2.2 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LAS SOLUCIONES DE SISTEMAS LINEALES DE ECUACIONES

2.2.1. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN $\mathbb{R}^2$

Los sistemas de ecuaciones lineales y sus soluciones pueden ser mapeadas en los espacios $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ en un principio, y generalizarse para un espacio $\mathbb{R}^n$.

Por ejemplo, las sean los siguientes sistemas de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{lll} (a) & x - y = 1 & (b) & x - y = 2 \\ & x + y = 3 & & 2x - 2y = 4 \end{array} \quad (c) \quad \begin{array}{l} x - y = 1 \\ x - y = 3 \end{array}$$

Resolviendo tales sistemas, se tiene:

- (a) La suma de las dos ecuaciones da $2x=4$, de manera que $x=2$, de lo que se desprende que $y=1$. una rápida verificación confirma que $[2, 1]$ es en realidad una solución de ambas ecuaciones. Ésta es la *única* solución que se puede ver al examinar que corresponde al (*único*) punto de intersección $(2, 1)$ de las rectas con ecuaciones $x - y = 1$ y $x + y = 3$, como se muestra en la figura 2.2.a. De este modo $[2, 1]$ es sólo ***una solución única***.

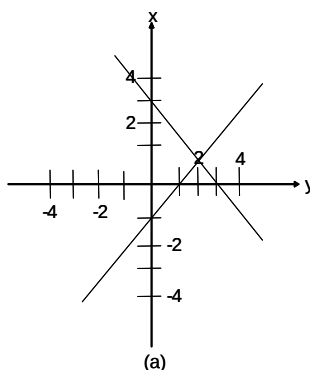


Figura 2.2.a. Representación geométrica de un sistema de ecuaciones lineales con solución única.

- (b) La segunda ecuación de este sistema es exactamente dos veces la primera, de modo que las soluciones son las mismas de esta última, a saber, los puntos sobre la recta $x - y = 2$. Estos pueden ser representados paramétricamente como $[2 + t, t]$. De esta manera, este sistema tiene **un número infinito de soluciones**, figura 2.2.b.

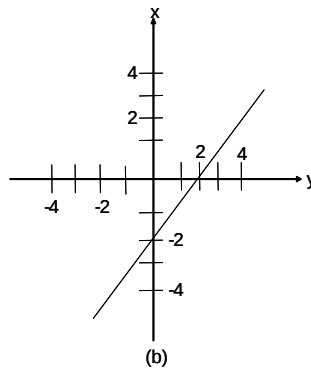


Figura 2.2.b Representación geométrica de un sistema de ecuaciones lineales con infinitud de soluciones.

- (c) Dos números x y y no pueden tener simultáneamente una diferencia de 1 y 3. por consiguiente este sistema no tiene soluciones (un enfoque más algebraico sería resaltar la segunda ecuación a la primera, con lo cual se llegaría a la igualmente absurda conclusión de que $0 = -2$) como se muestra en la figura 2.2.c., en este caso las ecuaciones de la rectas son paralelas.

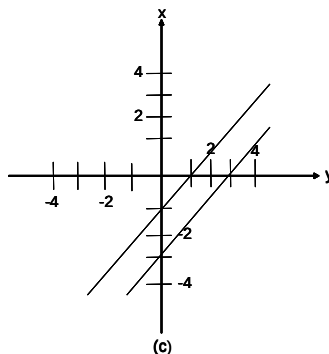


Figura 2.2.c. Representación geométrica de un sistema de ecuaciones lineales sin solución

2.2.2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN R^3

Cuando las rectas tienen un solo punto de intersección entonces el sistema de ecuaciones lineales tiene solución única; si coinciden, existe un número infinito de soluciones; si son paralelas, no existe una solución, y por lo tanto el sistema es inconsistente.

Algo similar pasa cuando se tienen tres ecuaciones con tres incógnitas, la grafica de la ecuación $ax + by + cz = d$ en el espacio de tres dimensiones es un plano.

Considere el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$ax + by + cz = d$$

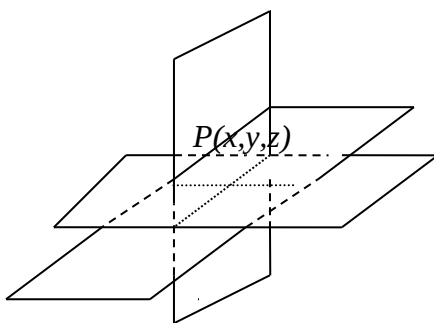
$$ex + fy + gz = h$$

$$jx + ky + lz = m$$

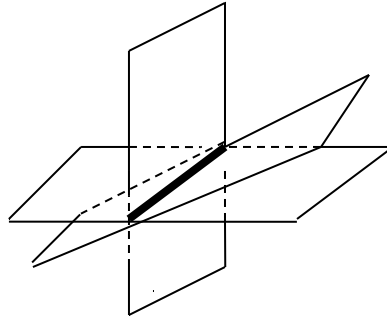
en donde $a, b, c, d, e, f, g, h, j, k, l$, y m son constantes y al menos una de ellas en cada ecuación es diferente de cero.

En este sistema de ecuaciones, cada ecuación, representa a un plano. Cada solución (x, y, z) al sistema de ecuaciones debe de ser al menos un mismo punto en cada uno de los tres planos. Existen tres posibilidades:

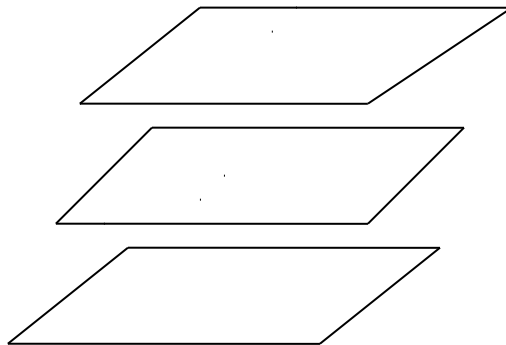
(a) Los tres planos se intersecan en un solo punto $P(x,y,z)$. Entonces existe una ***solución única*** para el sistema lineal de ecuaciones.



(b) Los tres planos coinciden en un número infinito de puntos, formando una recta o inclusive coincidiendo dos o más planos. Entonces en cada punto sobre el plano es una solución del sistema de ecuaciones lineales y por lo tanto se tiene **infinidad de soluciones** para el sistema de ecuaciones lineales.



(C) Dos o más planos que representan al sistema de ecuaciones lineales no coinciden mediante puntos o rectas (planos paralelos) de tal manera que ningún punto plano se interfecta con los otros. Por lo tanto **no existe solución** al sistema de ecuaciones lineales, y el sistema es inconsistente.



2.3 MÉTODOS DE SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. “ELIMINACION DE GAUSS”

Cuando se aplica la reducción de renglón a la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales, se crea un sistema que puede ser resuelto mediante sustitución hacia atrás. El proceso completo es conocido como “*Eliminación Gaussiana*”.

1. Escriba una matriz aumentada de sistema de ecuaciones lineales.
2. Utilice operaciones elementales de renglón para reducir la matriz aumentada a la forma escalonada del renglón.
3. Mediante la sustitución hacia atrás, resuelva el sistema equivalente que corresponda a la matriz del renglón reducido.

2.3 EJEMPLOS. Por el método de eliminación Gaussiana resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 1) \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ & x_1 - x_2 - 2x_3 = -5 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -5 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-2R_1+R_2 \\ -R_1+R_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \end{array} \right] \xrightarrow{2R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{5}R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

El sistema correspondiente es ahora:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_2 - x_3 &= -1 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

La sustitución hacia atrás da como resultado: $x_3 = 2$, $x_2 = 1$, $x_1 = 0$ de manera que la solución puede expresarse de forma vectorial como:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ & 4x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-2R_1+R_2 \\ -4R_1+R_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 9 \\ 0 & -5 & 7 & -18 \\ 0 & -9 & 13 & -32 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-\frac{1}{5}R_2 \\ 9R_2+R_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{18}{5} \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{5}{2}R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{18}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

El sistema correspondiente es ahora:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 9 \\ x_2 - \frac{7}{5}x_3 &= \frac{18}{5} \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

La sustitución hacia atrás da como resultado: $x_3 = 1$, $x_2 = 5$, $x_1 = 2$ de manera que la solución puede expresarse de forma vectorial como:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad & x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ & 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_1+R_2 \\ -2R_1+R_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-\frac{1}{2}R_2 \\ -8R_2+R_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{4}R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

El sistema correspondiente es ahora:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= 0 \\ x_2 - \frac{1}{2}x_3 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

La sustitución hacia atrás da como resultado: $x_3 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 = 0$ de manera que la solución puede expresarse de forma vectorial como:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Solución trivial})$$

$$\begin{aligned}
4) \quad & x_1 + 2x_2 - x_3 + 8x_4 = 2 \\
& 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 21 \\
& -2x_1 - 4x_2 + 8x_3 - x_4 = 6
\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 8 & 2 \\ 3 & 4 & -3 & 3 & 21 \\ -2 & -4 & 8 & -1 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-3R_1+R_2 \\ 2R_1+R_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -21 & 15 \\ 0 & 0 & 6 & 15 & 10 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-\frac{1}{2}R_1 \\ -\frac{1}{6}R_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{21}{2} & -\frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{15}{6} & \frac{10}{6} \end{array} \right]$$

Parametrizando: Si $x_4 = t$

$$\begin{aligned}
x_3 + \frac{15}{6}x_4 &= \frac{10}{6} & x_2 + 0 + \frac{21}{2}x_4 &= -\frac{15}{2} & x_1 + 2x_2 - x_3 + 8x_4 &= 2 \\
x_3 &= \frac{10}{6} - \frac{15}{6}t & x_2 &= -\frac{15}{2} - 0 - \frac{21}{2}x_4 & x_1 &= -2x_2 + x_3 - 8x_4 + 2 \\
& & x_2 &= -\frac{15}{2} - \frac{21}{2}t & x_1 &= -2\left(-\frac{15}{2} - \frac{21}{2}t\right) + \frac{10}{6} - \frac{15}{6}t - 8t + 2 \\
& & & & x_1 &= 15 + 21t + \frac{5}{3} - \frac{5}{2}t - 8t + 2 \\
& & & & x_1 &= \frac{56}{3} + \frac{21}{2}t
\end{aligned}$$

Nota:

Donde: "t" = 1, 2, 3, ..., n

Por lo tanto el sistema tiene infinitud de soluciones

$$\begin{aligned}
5) \quad & 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \\
& 3x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\
& 3x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 2
\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\frac{1}{2}R_1 \\ -3R_1+R_2 \\ -3R_1+R_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{3}{2} & -5 & 1 \\ 0 & -\frac{17}{2} & \frac{5}{2} & -7 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-\frac{2}{11}R_2 \\ \frac{17}{2}R_2+R_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{11} & \frac{10}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & 0 & \frac{2}{11} & \frac{8}{11} & \frac{5}{11} \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{11}{2}R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{11} & \frac{10}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \frac{5}{2} \end{array} \right]$$

Parametrizando: Si $x_4 = t$

$$\begin{aligned}
x_3 - 4x_4 &= \frac{5}{2} & x_2 - \frac{3}{11}x_3 + \frac{10}{11}x_4 &= -\frac{2}{11} & x_1 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 2x_4 &= 0 \\
x_3 &= \frac{5}{2} + 4t & x_2 &= -\frac{2}{11} + \frac{3}{11}x_3 - \frac{10}{11}x_4 & x_1 &= -\frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - 2x_4 \\
& & x_2 &= -\frac{2}{11} + \frac{3}{11}\left(\frac{5}{2} + 4t\right) - \frac{10}{11}t & x_1 &= -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{11}t\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} + 4t\right) - 2t \\
& & x_2 &= -\frac{2}{11} + \frac{15}{22} + \frac{12}{11}t - \frac{10}{11}t & x_1 &= -\frac{3}{4} - \frac{3}{11}t + \frac{5}{4} + 2t - 2t \\
& & x_2 &= \frac{1}{2} + \frac{2}{11}t & x_1 &= \frac{1}{2} - \frac{3}{11}t
\end{aligned}$$

Donde: "t" = 1, 2, 3, ..., n

Por lo tanto el sistema tiene infinitud de soluciones

$$\begin{aligned}
6) \quad & 2x_1 + x_2 = 3 \\
& 4x_1 - x_2 = 7 \\
& 2x_1 - 5x_2 = 5
\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 7 \\ 2 & -5 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\frac{1}{2}R1 \\ -4R1+R2 \\ -2R1+R3}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -6 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-\frac{1}{3}R2 \\ -6R2+R3}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -6 \end{array} \right]$$

El sistema correspondiente es ahora:

$$x_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$$

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = -\frac{1}{3}$$

El sistema correspondiente no tiene solución, ya que: $0 \neq -6$

$$\begin{aligned}
7) \quad & 7x_1 + 5x_2 = 8 \\
& -2x_1 - x_2 = 3 \\
& 9x_1 - 4x_2 = 5
\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 7 & 5 & 8 \\ -2 & -1 & 3 \\ 9 & -4 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\frac{1}{7}R1 \\ 2R1+R2 \\ -9R1+R3}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{5}{7} & \frac{8}{7} \\ 0 & \frac{3}{7} & \frac{37}{7} \\ 0 & -\frac{73}{7} & -\frac{37}{7} \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\frac{7}{3}R2 \\ \frac{73}{3}R2+R3}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{5}{7} & \frac{8}{7} \\ 0 & 1 & \frac{37}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2442}{49} \end{array} \right]$$

El sistema correspondiente es ahora:

$$x_1 = \frac{8}{7} - \frac{185}{21} = -\frac{23}{3}$$

$$x_1 + \frac{5}{7}x_2 = \frac{8}{7}$$

$$x_2 = \frac{37}{3}$$

$$0 = \frac{2442}{49}$$

El sistema correspondiente no tiene solución, ya que: $0 \neq \frac{2442}{49}$

$$\begin{aligned}
8) \quad & -3x_1 + 6x_2 + 8x_3 = -2 \\
& 4x_1 - x_2 + 9x_3 = 7
\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 6 & 8 & -2 \\ 4 & -1 & 9 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-\frac{1}{3}R1 \\ -4R1+R2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -\frac{8}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 7 & \frac{59}{3} & \frac{13}{3} \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{7}R2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -\frac{8}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{59}{21} & \frac{13}{21} \end{array} \right]$$

Parametrizando: Si $x_3 = t$

$$\begin{aligned} x_2 + \frac{59}{21}x_3 &= \frac{13}{21} & x_1 - 2x_2 - \frac{8}{3}x_3 &= \frac{2}{3} \\ x_2 &= \frac{13}{21} - \frac{59}{21}t & x_1 &= \frac{2}{3} + x_2 + \frac{8}{3}x_3 \\ & & x_1 &= \frac{2}{3} + 2\left(\frac{13}{21} - \frac{59}{21}t\right) + \frac{8}{3}t \\ & & x_1 &= \frac{2}{3} + \frac{26}{21} - \frac{118}{21}t + \frac{8}{3}t \\ & & x_1 &= \frac{40}{21} - \frac{62}{21}t \end{aligned}$$

Nota:

Donde: " t " = 1, 2, 3....., n

Por lo tanto el sistema tiene infinidad de soluciones

$$\begin{aligned} 9) \quad x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 4 \\ -2x_1 - 4x_2 + 8x_3 &= -8 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 4 \\ -2 & -4 & 8 & -8 \end{array} \right] \xrightarrow{2R1+R2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

El sistema correspondiente es ahora:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 4 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Con $x_2=t_1$ y $x_3=t_2$

Donde: " t_n " = 1, 2, 3....., n

Por lo tanto el sistema tiene infinidad de soluciones

2.3 EJERCICIOS. Por el método de Eliminación Gaussiana, resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 1) \quad & x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 11 \\ & 4x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & -2x_1 + x_2 + 6x_3 = 18 \\ & 5x_1 + 8x_3 = -16 \\ & 3x_1 + 2x_2 - 10x_3 = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad & 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 9 \\ & 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 6 \\ & -x_1 + 16x_2 - 14x_3 = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad & 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 9 \\ & 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 6 \\ & 5x_1 + 28x_2 - 26x_3 = -8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \quad & x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ & 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 4 \\ & 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) \quad & x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ & 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 6 \\ & 6x_1 + x_2 + 3x_3 = 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7) \quad & x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ & 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 4 \\ & 6x_1 + x_2 + 3x_3 = 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8) \quad & x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ & 4x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9) \quad & x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ & 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ & 6x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10) \quad & 2x_2 + 5x_3 = 6 \\ & x_1 - 4x_3 = 4 \\ & 2x_1 + 4x_2 = -2 \end{aligned}$$

RESPUESTAS:

$$1) \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

3) *Parametrizando a x_3 , el sistema tiene infinidad de soluciones*

$$5) \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} -9 \\ 30 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

7) *No existe solución para este sistema*

9) *Parametrizando a x_3 , el sistema tiene infinidad de soluciones*

2.4 ELIMINACIÓN POR GAUSS-JORDAN

Una modificación de la Eliminación Gaussiana simplifica en gran medida la fase de sustitución hacia atrás, y es particularmente útil cuando se hacen los cálculos a mano en un sistema que tiene un número infinito de ecuaciones. Esta variante conocida como la **eliminación de Gauss-Jordan**, depende de reducir aún más la matriz aumentada.

Definición. Una matriz se encuentra en **forma reducida del renglón escalonado** si satisface las propiedades siguientes:

1. Cualquier renglón conformado completamente por ceros se encuentra en la parte inferior
2. La entrada principal en cada renglón distinto de cero es un 1 (denominado **1 principal**)
3. Cada columna que contiene un 1 principal tiene ceros en cualquier otro sitio.

Eliminación de Gauss-Jordan

1. Escriba una matriz aumentada del sistema de ecuaciones lineales.
2. Utilice operaciones elementales del renglón para reducir la matriz aumentada a la forma reducida del renglón escalonado.
3. Si el sistema resultante es consistente, resuelva para las variables principales en términos de cualquier variable libre restante.

2.4 EJEMPLOS. Resuelva el sistema por medio de la eliminación Gauss-Jordán

$$\begin{aligned} 1) \quad & 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18 \\ & 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ & 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\frac{1}{2}R1 \\ -4R1+R2 \\ -3R1+R3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-\frac{1}{3}R2 \\ -2R2+R1 \\ 5R2+R3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-R3 \\ -2R3+R2 \\ R3+R1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 5 \\ & 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ & 5x_1 - 3x_2 - x_3 = 16 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & -1 & 16 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\frac{1}{2}R1 \\ -3R1+R2 \\ -5R1+R3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{13}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{13}{2} & \frac{7}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-2R2 \\ \frac{1}{2}R2+R1 \\ \frac{1}{2}R2+R3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -8 & 5 \\ 0 & 1 & -13 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right]$$

El sistema correspondiente no tiene solución, ya que: $0 \neq 6$

$$\begin{aligned} 3) \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 4 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 17x_3 = 1 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 7 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-2R1+R2 \\ -3R1+R3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & -2 & -8 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-R2 \\ -2R2+R1 \\ 4R2+R3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-\frac{1}{10}R3 \\ 2R3+R2 \\ -7R3+R1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad & 2x_1 + 3x_2 = 3 \\
 & x_1 - 2x_2 = 5 \\
 & 3x_1 + 2x_2 = 7
 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & 2 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\frac{1}{2}R1 \\ -R1+R2 \\ -3R1+R3}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-\frac{2}{7}R2 \\ -\frac{3}{2}R2+R1 \\ \frac{5}{2}R2+R3}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad & 6x_1 - 7x_2 = 10 \\
 & -x_1 + 4x_2 = 8 \\
 & 3x_1 + 5x_2 = 7
 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & -7 & 10 \\ -1 & 4 & 8 \\ 3 & 5 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\frac{1}{6}R1 \\ R1+R2 \\ -3R1+R3}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{7}{6} & \frac{10}{6} \\ 0 & \frac{17}{6} & \frac{29}{3} \\ 0 & \frac{17}{2} & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\frac{6}{17}R2 \\ \frac{17}{6}R2+R1 \\ -\frac{17}{2}R2+R3}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{96}{17} \\ 0 & 1 & \frac{58}{17} \\ 0 & 0 & -27 \end{array} \right]$$

El sistema correspondiente no tiene solución, ya que: $0 \neq -27$

$$\begin{aligned}
 6) \quad & 2x_1 + 3x_2 = 1 \\
 & 5x_1 + 7x_2 = 3
 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\frac{1}{2}R1 \\ -5R1+R2}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-2R1 \\ -\frac{3}{2}R2+R1}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
7) \quad & x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 13x_4 = 3 \\
& 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 2 \\
& 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 1
\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & -13 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-3R_1+R_2 \\ -2R_1+R_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & -13 & 3 \\ 0 & -16 & -10 & 44 & -7 \\ 0 & -8 & -5 & 22 & -5 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-\frac{1}{16}R_2 \\ -5R_2+R_1 \\ -8R_2+R_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{7}{8} & \frac{3}{4} & \frac{13}{16} \\ 0 & 1 & \frac{10}{16} & -\frac{44}{16} & \frac{7}{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-\frac{1}{4}R_3 \\ -\frac{16}{16}R_3+R_2 \\ -\frac{7}{8}R_3+R_1}} \rightarrow$$

El sistema correspondiente no tiene solución, ya que: $0 \neq -\frac{3}{2}$

2.4 EJERCICIOS. Resuelva el sistema por medio de la eliminación Gauss-Jordan

$$\begin{aligned}
1) \quad & x_1 + x_3 + x_4 = -5 \\
& x_1 - x_3 + x_4 = -1 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -3 \\
& x_1 + 2x_3 = -2
\end{aligned}$$

RESPUESTA: $\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}
2) \quad & x_1 - 8x_2 + 7x_4 = 9 \\
& -2x_1 + 16x_2 - x_3 - 20x_4 = -24 \\
& 2x_1 - 16x_2 + 6x_3 + 50x_4 + x_5 = 51
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3) \quad & x_1 - 8x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \\
& -2x_1 - x_2 - 10x_3 - 16x_4 = -6 \\
& 2x_1 + 6x_2 + 20x_3 + 46x_4 + x_5 = 33
\end{aligned}$$

RESPUESTA: $\vec{x} = \begin{bmatrix} 7t_4 - \frac{417}{40} \\ \frac{3}{80} \\ -3t_4 + \frac{429}{160} \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}
4) \quad & 6x_1 - 4x_3 + 4x_4 = 0 \\
& 2x_1 - x_2 - x_3 - 6x_4 = -6 \\
& 16x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 12
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5) \quad & x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\
& x_1 + x_4 = -1 \\
& x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\
& x_1 + 2x_2 = -3
\end{aligned}$$

RESPUESTA: $\vec{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}
 6) \quad & x_1 + 2x_3 - x_4 = -1 \\
 & x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\
 & x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 4 \\
 & x_2 + x_3 = -2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7) \quad & 3x_1 + x_3 + x_4 = -3 \\
 & 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 14 \\
 & x_3 - x_4 = 6 \\
 & x_4 = -4
 \end{aligned}$$

$$\text{RESPUESTA: } \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

2.5 APLICACIONES. CIRCUITOS ELECTRICOS (REDES)

Las redes o circuitos eléctricos son un tipo especializado de red que proporciona información acerca de fuentes de poder o alimentación, tales como las bombillas eléctricas o los motores. Una fuente de poder “obliga” a una corriente de electrones a fluir a través del circuito, donde encuentra varios resistores, cada uno de los cuales requiere que cierta cantidad de fuerza sea aplicada a fin de que la corriente fluya a través de ellos.

La ley fundamental de la electricidad es la ley de Ohm, que establece exactamente cuánta fuerza Electromotriz E es necesaria para conducir una corriente I a través de un resistor con una resistencia igual a R .

$$FUERZA ELECTROMOTRIZ = RESISTENCIA \times CORRIENTE$$

$$E = RI$$

La Fuerza Electromotriz (E) se mide en volts, la Resistencia (R) se mide ohms y la Corriente (I) en amperios. Así, en términos de estas unidades, la ley de ohm se convierte en “voltios = ohms X amps”, y nos dice que la caída de voltaje se establece cuando una corriente pasa a través de un resistor; es decir, cuanto voltaje se gasta.

LEYES DE KIRCHHOFF

Ley de la corriente (nodos)

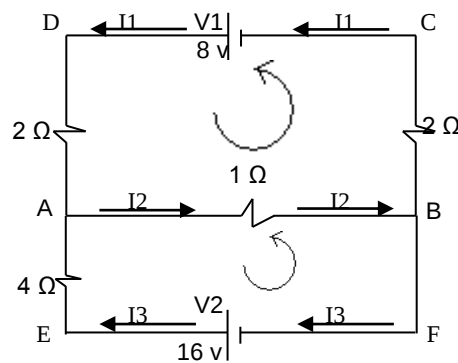
- La suma de las corrientes que fluyen hacia cualquier nodo es igual a la suma de las corrientes que fluyen hacia fuera de este nodo.

Ley del voltaje (mallas)

- La suma de las caídas de voltaje en cualquier circuito es igual al voltaje total del circuito (proporcionado por las baterías).

2.5 EJEMPLOS. Determine las corrientes indicadas en los siguientes circuitos eléctricos

1) Determine las corrientes I_1, I_2, I_3 del circuito eléctrico que se presenta en la siguiente figura.



En el nodo A la ley de la corriente se obtiene:

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

De manera semejante se obtiene la misma ecuación para la malla $CDABC$, pero aplicando la ley de voltajes se tiene que:

Malla : CDABC

$$8 - 2I_1 - I_2 - 2I_1 = 0$$

$$8 - 4I_1 - I_2 = 0$$

$$4I_1 + I_2 = 8$$

Observando la Malla $BAEFB$ se obtiene que:

.

Malla : BAEFB

$$I_2 + 4I_3 - 16 = 0$$

$$I_2 + 4I_3 = 16$$

Con estas tres ecuaciones podemos construir un sistema de ecuaciones:

$$3) \quad I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

$$4I_1 + I_2 = 8$$

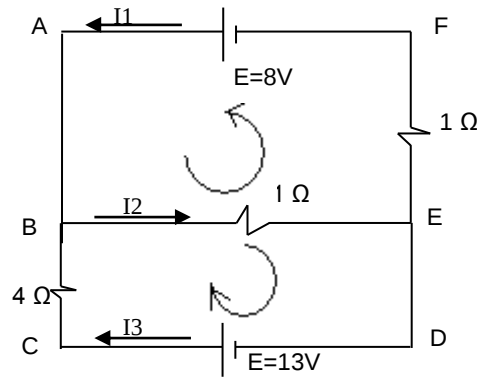
$$I_2 + 4I_3 = 16$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 16 \end{array} \right] \xrightarrow{-4R1+R2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 16 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} \frac{1}{5}R2 \\ R2+R1 \\ -R2+R3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{24}{5} & \frac{72}{5} \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} \frac{4}{5}R3+R2 \\ -\frac{1}{5}R3+R1 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Es decir: $\vec{I} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

Por lo tanto el valor de las corrientes es: $I_1 = 1A$; $I_2 = 4A$; $I_3 = 3A$

2)



Nodo B:

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

Malla BEDCB:

$$-I_2 + 13 - 4I_3 = 0$$

$$-I_2 - 4I_3 = -13$$

$$I_2 + 4I_3 = 13$$

Malla ABEFA:

$$-I_2 - I_1 + 8 = 0$$

$$I_1 + I_2 = 8$$

$$\text{nodo B: } I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

$$\text{malla BEDCB: } I_2 + 4I_3 = 13$$

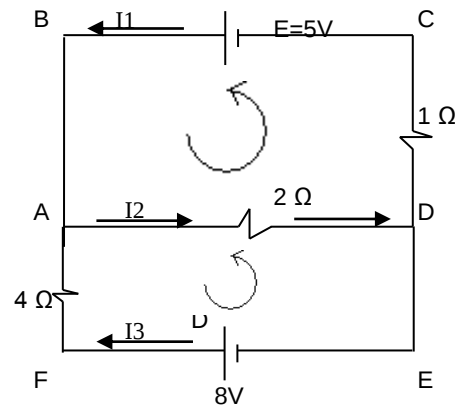
$$\text{malla ABEFA: } I_1 + I_2 = 8$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 13 \\ 1 & 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R1+R3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R2+R1 \\ -2R2+R3 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & -9 & -18 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} -\frac{1}{9}R3 \\ -4R3+R2 \\ -5R3+R1 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{I} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto el valor de las corrientes es: $I_1 = 3A$; $I_2 = 5A$; $I_3 = 2A$

3)



Malla DCBAD :

$$-I_1 + 5 - 2I_2 = 0$$

$$-I_1 - 2I_2 = -5$$

$$I_1 + 2I_2 = 5$$

Malla AFEDA:

$$4I_3 - 8 + 2I_2 = 0$$

$$2I_2 + 4I_3 = 8$$

Nodo A:

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

$$\text{malla DCBAD: } -I_1 - 2I_2 = -5$$

$$\text{malla AFEDA: } 2I_2 + 4I_3 = 8$$

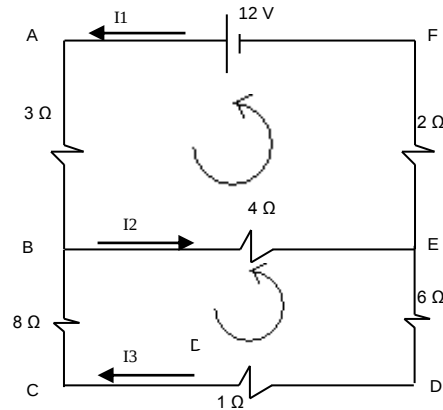
$$\text{nodo A: } I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R1+R3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \frac{1}{2}R2 \\ -2R2+R1 \\ 3R2+R3 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \frac{1}{7}R3 \\ -2R3+R2 \\ 4R3+R1 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{I} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto el valor de las corrientes es: $I_1 = 1A$; $I_2 = 2A$; $I_3 = 1A$

4)



Malla BEFAB :

$$-4I_2 - 2I_1 + 12 - 3I_1 = 0$$

$$-5I_1 - 4I_2 + 12 = -5$$

$$-5I_1 - 4I_2 = -12$$

$$5I_1 + 4I_2 = 12$$

Malla BEDCB :

$$4I_2 + 6I_3 + I_3 + 8I_3 = 0$$

$$4I_2 + 15I_3 = 0$$

Nodo B :

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

$$\text{malla BEFAB : } 5I_1 + 4I_2 = 12$$

$$\text{malla BEDCB : } 4I_2 + 15I_3 = 0$$

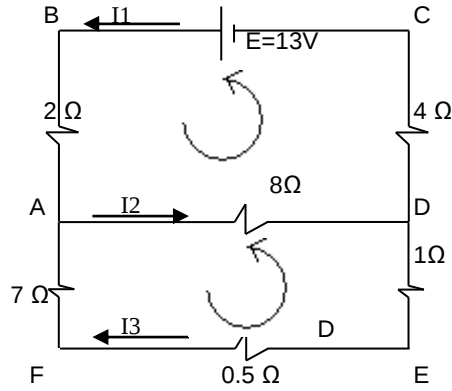
$$\text{nodo B : } I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 & 12 \\ 0 & 4 & 15 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \frac{1}{5}R1 \\ -R1+R3 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{12}{5} \\ 0 & 4 & 15 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{5} & 1 & -\frac{12}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \frac{1}{4}R2 \\ -\frac{4}{5}R2+R1 \\ \frac{9}{5}R2+R3 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & \frac{12}{5} \\ 0 & 1 & \frac{15}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{31}{4} & -\frac{12}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \frac{4}{31}R3 \\ -\frac{15}{31}R3+R2 \\ 3R3+R1 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{228}{155} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{36}{31} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{48}{155} \end{bmatrix}$$

$$\vec{I} = \begin{bmatrix} \frac{228}{155} \\ \frac{36}{31} \\ -\frac{48}{155} \end{bmatrix}$$

$$I_1 = \frac{228}{155} \text{ A}; \quad I_2 = \frac{36}{31} \text{ A}; \quad I_3 = -\frac{48}{155} \text{ A}$$

5



$$\text{malla DCBAD} : 6I_1 + 8I_2 = 13$$

$$\text{malla AFEDA} : -8I_2 + 8.5I_3 = 0$$

$$\text{nodo A} : I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

Malla DCBAD :

$$-4I_1 - 2I_1 + 13 - 8I_1 = 0$$

$$-6I_1 - 8I_2 + 13 = 0$$

$$-6I_1 - 8I_2 = -13$$

$$6I_1 + 8I_2 = 13$$

Malla AFEDA :

$$7I_3 + \frac{1}{2}I_3 + I_3 + 8I_3 = 0$$

$$8I_2 + \frac{17}{2}I_3 = 0$$

Nodo A :

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 8 & 0 & 13 \\ 0 & 8 & \frac{17}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \frac{1}{6}R1 \\ -R1+R3 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{8}{6} & 0 & \frac{13}{6} \\ 0 & 8 & \frac{17}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{7}{3} & 1 & -\frac{13}{6} \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} -\frac{1}{8}R2 \\ -\frac{8}{6}R2+R1 \\ \frac{7}{3}R2+R3 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{17}{12} & \frac{13}{6} \\ 0 & 1 & \frac{17}{16} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{167}{48} & -\frac{13}{6} \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \frac{48}{167}R3 \\ \frac{17}{167}R+R2 \\ -\frac{17}{12}R3+R1 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{429}{334} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{221}{334} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{104}{167} \end{bmatrix}$$

$$\vec{I} = \begin{bmatrix} \frac{429}{334} \\ \frac{221}{334} \\ -\frac{104}{167} \end{bmatrix}$$

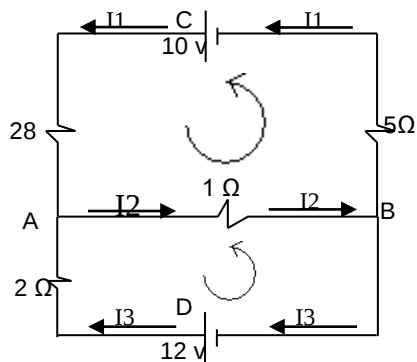
Por lo tanto el valor de las corrientes es:

$$I_1 = 1.284A; \quad I_2 = 0.661A; \quad I_3 = -0.6227A$$

Nota: el signo negativo de la corriente I_3 es porque es tomado en sentido contrario la polarización.

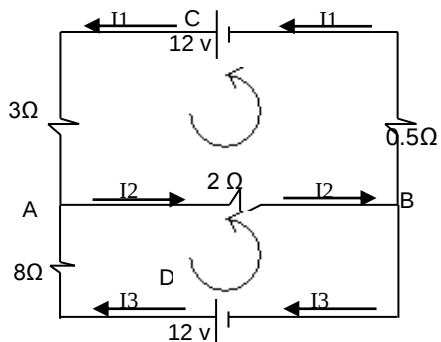
2.5 EJERCICIOS. Determine las corrientes indicadas en los siguientes circuitos eléctricos

1)



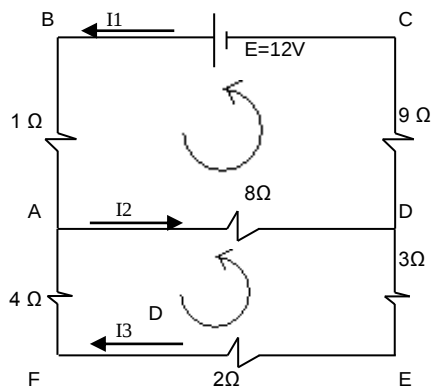
Re spuesta : $I_1 = 0.17 \text{ Am.}$ $I_2 = 4.11 \text{ Am.}$ $I_3 = 3.94 \text{ Am.}$

2)



Re spuesta : $I_1 = 2.33 \text{ Am.}$ $I_2 = 1.91 \text{ Am.}$ $I_3 = -0.41 \text{ Am.}$

3)



Re spuesta : $I_1 = 0.84 \text{ Am.}$ $I_2 = 0.44 \text{ Am.}$ $I_3 = -0.39 \text{ Am.}$

Nota: El signo negativo de la corriente I_3 es porque es tomado en sentido contrario la polarizacion.

3. MATRICES Y DETERMINANTES

3.1 INTRODUCCIÓN.

Ahora se estudiará la matriz por su propio valor. Anteriormente se han utilizado matrices (en la forma de matrices aumentadas) para registrar información y para ayudar a racionalizar los cálculos con ellas, por ejemplo en la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Ahora se verá que las matrices tienen propiedades algebraicas propias, que permiten hacer cálculos con ellas, sujetas a las reglas algebraicas de matrices. Además, se observará que las matrices no son objetos estáticos, que recopilan información y datos; en lugar de ello, representan varios tipos de funciones que “actúan” como vectores, transformándolos en otros vectores. Estas transformaciones matriciales comenzarán a jugar un papel preponderante en el estudio de álgebra lineal y emitirán una nueva luz sobre lo que ya se ha aprendido acerca de los vectores y sistemas de ecuaciones lineales. Además de que las matrices se presentan en muchas otras formas aparte de las versiones aumentadas.

Definición. Una matriz es el arreglo rectangular de números determinados a las entradas o elementos de una matriz

3.2 OPERACIONES CON MATRICES

3.2.1 Suma de matrices.

Generalizando a partir de la adición de vectores, se define la adición de matrices por componentes. Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son matrices de $m \times n$, su suma $A + B$ es la matriz de $m \times n$, obtenida mediante la suma de las entradas correspondientes, de esta manera,

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

De igual manera, se podría haber definido $A + B$ en términos de la adición de vectores especificando que cada columna (o renglón) de $A + B$ fuera de la suma de las columnas (o renglones) correspondientes de A y B . Si no son del mismo tamaño, entonces $A + B$ no está definida.

3.2.2. MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

A diferencia de las definiciones de adición de matrices y la multiplicación por un escalar, la conceptualización del producto de dos matrices no es una definición por componentes. Naturalmente, no hay nada que nos detenga para definir un producto de matrices en forma de componentes; desafortunadamente tal definición tiene pocas aplicaciones y no es tan natural como la que ahora se muestra:

Definición. Si A es una matriz de dimensiones $m \times n$ y B una matriz de dimensiones $n \times r$, entonces el producto $C=AB$ es una matriz de $m \times r$. La entrada del producto se calcula como sigue:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

Observaciones: nótese que A y B no necesitan ser del mismo tamaño. Sin embargo el número de columnas de la matriz A debe de ser el mismo que el número de renglones de la matriz B . Si se escriben los tamaños de A , B y AB en orden, se puede apreciar de un vistazo si este requerimiento es satisfecho.

Además se puede predecir el tamaño del producto antes de hacer cualquier cálculo, puesto que el número de renglones de AB es el mismo que el de los renglones de A , mientras que el número de de las columnas de AB es el mismo que el de las columnas de B como se muestra a continuación:

$$\begin{array}{ccc} A & B & = & AB \\ m \times n & n \times r & & m \times r \end{array}$$

La fórmula para las entradas del producto se asemejan a un producto punto y en realidad lo es. Se dice que la entrada (i y j de la matriz AB es el producto punto de el i -enésimo renglón de A y de la j -enésima columna de B .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2r} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix}$$

Nótese que en la expresión $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$ los subíndices exteriores en cada término ab de la suma son siempre i y j mientras que en los subíndices interiores siempre concuerdan y se incrementan desde 1 hasta n . Se observa este patrón claramente si se escribe mediante el empleo de la notación de sumatoria, tal como se muestra a continuación

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

La *transpuesta* de una matriz A de $m \times n$, es la matriz de A^T de $n \times m$, que se obtiene cuando se intercambian los renglones y columnas de A . Es decir la i -enésima columna de A^T es el i -enésimo renglón de A para toda i .

3.2 EJEMPLOS. Realice las operaciones entre las matrices indicadas de los siguientes ejercicios. (Si es posible)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$
$$D = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1) $A + 2D$

2) $3D - 2A$

3) $B - C$

4) $B - C^T$

5) AB

6) BD

7) $D + BC$

8) $B B^T$

9) $E(AF)$

10) $F(DF)$

$$1) \quad A + 2D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$2) \quad 3D - 2A = 3 \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -9 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 2 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ -8 & 13 \end{bmatrix}$$

$$3) \quad B - C = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{"No es posible realizar la operación"}$$

$$4) \quad B - C^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -4 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$5) \quad AB = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3)(4) + (0)(0) & (3)(-2) + (0)(2) & (3)(1) + (0)(3) \\ (-1)(4) + (5)(0) & (-1)(-2) + (5)(2) & (-1)(1) + (5)(3) \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 12 & -6 & 3 \\ -4 & 12 & 14 \end{bmatrix}$$

$$6) \quad BD = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{"No es posible realizar la operación"}$$

$$7) \quad D + BC = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 21 & 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 19 & 27 \end{bmatrix}$$

Donde :

$$BC = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (4)(1) + (-2)(3) + (1)(5) & (4)(2) + (-2)(4) + (1)(6) \\ (0)(1) + (2)(3) + (3)(5) & (0)(2) + (2)(4) + (3)(6) \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 4 - 6 + 5 & 8 - 8 + 6 \\ 0 + 6 + 15 & 0 + 8 + 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 21 & 26 \end{bmatrix}$$

$$8) \quad BB^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (4)(4)+(-2)(-2)+(1)(1) & (4)(0)+(-2)(2)+(1)(3) \\ (0)(4)+(2)(-2)+(3)(1) & (0)(0)+(2)(2)+(3)(3) \end{bmatrix}$$

$$BB^T = \begin{bmatrix} 16+4+1 & 0-4+3 \\ 0-4+3 & 0+4+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -1 \\ -1 & 13 \end{bmatrix}$$

$$9) \quad E(AF) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 11 \end{bmatrix} = [(4)(-3)+(2)(11)] = [-12+22] = [10]$$

Donde :

$$AF = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3)(-1)+(0)(2) \\ (-1)(-1)+(5)(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+0 \\ 1+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$10) \quad F(DF) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \end{bmatrix} \quad " \text{No es posible realizar la operación} "$$

Donde :

$$DF = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0)(-1)+(-3)(2) \\ (-2)(-1)+(1)(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-6 \\ 2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

3.2 EJERCICIOS. Realice las operaciones entre las matrices indicadas de los siguientes ejercicios. (Si es posible)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1) $B - C$; *Re spuesta : No es posible realizar la operación*

2) AB

3) $D + BC$; *Re spuesta :* $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 19 & 27 \end{bmatrix}$

4) $E(AF)$

5) FE ; *Re spuesta :* $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

6) $B^T C^T - (CB)^T$

7) A^3 ; *Re spuesta :* $\begin{bmatrix} 27 & 0 \\ -49 & 125 \end{bmatrix}$

8) $E^T + F$

9) $A^T D$ *Re spuesta :* $\begin{bmatrix} 2 & -10 \\ -10 & 5 \end{bmatrix}$

10) $2D + 8C^T$

3.3 CLASIFICACIÓN DE MATRICES

a) *Triangular Superior*

Una matriz cuadrada se denomina *triangular superior* si todas las entradas por debajo de la diagonal principal son cero. De este modo la forma de una matriz triangular superior es:

$$\begin{bmatrix} * & * & \dots & * & * \\ 0 & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & * & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * \end{bmatrix}$$

Donde las entradas marcadas con un * son arbitrarias. Una definición más formal de una matriz $A = [a_{ij}]$ de esta clase, es que $a_{ij} = 0$ si $i > j$.

b) *Triangular Inferior*.

Una matriz cuadrada se denomina *triangular inferior* si todas las entradas por arriba de la diagonal principal son cero. De este modo la forma de una matriz triangular inferior es:

$$\begin{bmatrix} * & 0 & \dots & 0 & 0 \\ * & * & \dots & 0 & 0 \\ * & * & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & * & 0 \\ * & * & \dots & * & * \end{bmatrix}$$

Donde las entradas marcadas con un * son arbitrarias. Una definición más formal de una matriz $A = [a_{ij}]$ de esta clase, es que $a_{ij} = 0$ si $i < j$

c) *Diagonal*.

Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ se llama diagonal si todos sus elementos fuera de la diagonal principal son cero. Esto es $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$. De este modo una matriz diagonal es:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

d) *Escalar.*

Una matriz diagonal en la cual todas sus entradas diagonales son las mismas se les conoce como *matriz escalar*. Si el escalar de la diagonal es 1, la matriz escalar se le llama *matriz identidad*, por ejemplo sean:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las entradas diagonales de A son 2 y 4, pero A no es cuadrada: B es una matriz cuadrada de 2×2 con entradas diagonales 3 y 5; C es una matriz diagonal: D es una matriz identidad de 3×3 . La matriz identidad de $n \times n$ se denota mediante el símbolo I_n (o simplemente I si sus dimensiones son obvias).

e) *Nilpotente.*

Una matriz cuadrada A se denomina *nilpotente* (de potencia nula) si $A^m = 0$ para algún $m > 1$. La palabra nilpotente proviene del latín *nihil* que significa “nada” y *potere*, que quiere decir “poder”. Una matriz nilpotente es, entonces una que se convierte en nada (es decir la matriz cero) cuando se eleva alguna potencia.

f) *Idempotente*

Una matriz cuadrada A se denomina *idempotente* si $A^2 = A$ (la palabra *idempotente* proviene del latín *Idem*, que significa “lo mismo” y *potere* que quiere decir “tener poder”, “tener potencia”. De esta manera algo que es idempotente tiene la “misma potencia” cuando se eleva al cuadrado.

g) *Potencia*

Cuando A y B son dos matrices de $n \times n$ su producto AB también será una matriz de $n \times n$. Un caso especial se presenta cuando $A = B$. tiene sentido definir $A^2 = AA$ y en general, definir A^k como

$$A^k = AA \cdots A$$

Si k es un entero positivo. De esta forma y A es conveniente para definir.

Antes de hacer demasiadas suposiciones deberíamos preguntarnos hasta que punto las potencias de matrices se comportan como potencias de números reales.

Las propiedades que se presentan a continuación se siguen inmediatamente de las definiciones que se acaban de dar y son los análogos matriciales de las correspondientes propiedades de las potencias de los números reales

Si A es una matriz cuadrada y r y s son enteros no negativos, entonces

1. $A^r A^s = A^{r+s}$
2. $(A^r)^s = A^{rs}$

h) Transpuesta

Hasta ahora todas las operaciones con matrices que se han definido son análogas a las correspondientes con números reales, aunque pueden no comportarse siempre de la misma manera. La operación siguiente no tiene un análogo así.

La *transpuesta* de una matriz A de $m \times n$, es la matriz de A^T de $n \times m$, que se obtiene cuando se intercambian los renglones y columnas de A . Es decir la i -enésima columna de A^T es el i -enésimo renglón de A para toda i .

En ocasiones, la transpuesta es empleada para proporcionar una definición alternativa del producto punto de dos vectores en términos de la multiplicación de matrices.

Una definición alternativa útil de la transpuesta se proporciona en términos de sus componentes:

$$(A_{ij})^T = A_{ji} \quad \text{para toda } i \text{ y } j$$

i) Simétrica

La transpuesta también se utiliza para definir un tipo muy importante de matriz cuadrada: una matriz simétrica. Una matriz cuadrada es simétrica si es igual a su propia transpuesta, sea:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Entonces A es simétrica, puesto que $A^T = A$ pero B no es simétrica,

puesto que $B^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \neq B$

Una matriz simétrica tiene la propiedad de que es su propia imagen (como un espejo) con respecto a su diagonal principal.

Una matriz simétrica cuadrada A es simétrica si y solo si $A_{ij} = A_{ji}$ para toda i y j.

j) Antisimétrica

Una matriz cuadrada se llama antisimétrica si $A^T = -A$ (es decir $a_{ij} = -a_{ji}$).

Lo que quiere decir que la transpuesta de una matriz es igual a la negativa de la matriz original.

k) Hermitiana

La matriz A se llama Hermitiana si $A^* = A$ donde A^* es la matriz transpuesta conjugada de A, denotada como A^* , y que esta definida por el elemento ij de $A^* = \overline{a_{ji}}$

l) Ortogonal

Una matriz Q de $n \times n$ cuyas columnas forman un conjunto orto-normal se denomina matriz ortogonal.

El hecho más importante acerca de las matrices ortogonales es señalado por el siguiente teorema:

Una matriz cuadrada Q es ortogonal si y solo si $Q^{-1} = Q^T$.

3.4 MATRIZ INVERSA

En esta parte se regresará a la descripción de la matriz $Ax=b$ de un sistema de ecuaciones lineales y se investigará maneras para utilizar el algebra de matrices para resolver el sistema. A modo de analogía considere la ecuación $ax+b$ donde a, b , y x representan números reales y queremos resolverla para x . Rápidamente se puede comprender que se quiere $x=b/a$ como la solución. Pero se debe recordar que ello es cierto si y solo si $a \neq 0$, se alcanzará la solución mediante la siguiente serie de pasos:

$$ax=b \Rightarrow \frac{1}{a}(ax) = \frac{1}{a}(b) \Rightarrow \left(\frac{1}{a}(a)\right)x = \frac{b}{a} \Rightarrow 1 \cdot x = \frac{b}{a} \Rightarrow x = \frac{b}{a}$$

Para imitar este procedimiento para la ecuación matricial $Ax=b$ ¿Qué es lo que se necesita? Se necesita hallar una matriz A' tal que $A' A=I$, una matriz identidad. Si una matriz así existe entonces se puede efectuar la siguiente secuencia de cálculos:

$$Ax=b \Rightarrow A' (Ax) = A' b \Rightarrow (A' A)x = A' b \Rightarrow Ix = A' b \Rightarrow x = A' b$$

Definición: Si A es una matriz de $n \times n$, una inversa de A es una matriz A' de $n \times n$ con la propiedad de que

$$A A' = I \quad \text{y} \quad A' A = I$$

Donde $I = I_n$ es la matriz identidad de $n \times n$. si tal A' existe, entonces A se dice que es *invertible*.

Teorema 1:

Si A es una matriz invertible, entonces su inversa es única.

Teorema 2:

Si A es una matriz de $n \times n$, entonces el sistema de ecuaciones lineales dado por $Ax=b$ tiene solución única $x=A^{-1}b$ para cualquier b en $\mathbb{R}$.

Teorema 3:

Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, entonces A es invertible si $ad - bc \neq 0$, cuyo caso

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Si $ad - bc = 0$, entonces A no es invertible.

Teorema 4:

- Si A es una matriz invertible, entonces A^{-1} es invertible y:
$$(A^{-1})^{-1} = A$$
- Si A es una matriz invertible, y c es un escalar diferente de cero, entonces AB es invertible y:
$$(cA^{-1}) = \frac{1}{c} A^{-1}$$
- Si A y B son matrices invertibles del mismo tamaño, entonces AB es invertible y:
$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$
- Si A es una matriz invertible, entonces A^T es invertible y:
$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$
- Si A es una matriz invertible, entonces A^n es invertible para todos los enteros negativos n y:
$$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$$

Teorema 5:

Sea E la matriz elemental que se obtiene cuando se efectúa una operación elemental por renglón sobre I_n . Si la misma operación elemental por renglón se realiza sobre una matriz de A de $n \times r$, el resultado es el mismo que el de la matriz EA .

Teorema 6:

Cada matriz elemental es invertible y su inversa es una matriz elemental del mismo tipo.

Teorema 7:

Sea una matriz de $n \times n$. las declaraciones siguientes son equivalentes:

- A es invertible
- $Ax=b$ tiene una solución única para toda b en $\mathbb{R}^n$
- $Ax=0$ tiene únicamente una solución trivial.
- La forma reducida escalonada por renglón de A es I_n
- A es un producto de matrices elementales.

Teorema 8:

Sea A una matriz cuadrada. Si B es una matriz cuadrada tal que $AB = I$ o $BA = I$, entonces A es invertible y $B = A^{-1}$.

Teorema 9:

Sea A una matriz cuadrada. Si una sucesión de operaciones elementales por renglón reduce a A a I , entonces la misma sucesión de operaciones elementales por renglón transforma a I en A^{-1} .

3.4 EJEMPLOS. Calcular la matriz inversa de los siguientes ejercicios (si es posible)

1) $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\frac{1}{4}R1 \\ -R1+R2}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{7}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{4R1 \\ -\frac{7}{4}R2+R1}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right]$$

Comprobando :

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2) $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 4 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\frac{1}{4}R1 \\ -2R1+R2}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{2}R2+R1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right]$$

Comprobando :

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 6 & 8 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\frac{1}{3}R1 \\ -6R1+R2}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

Nota :

Como en el segundo renglon aparece un cero, quiere decir que esta matriz no tiene matriz invertible.

4) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

e) $\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\frac{1}{3}R1 \\ -R1+R2}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\frac{3}{4}R1 \\ -\frac{2}{3}R2+R1}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array} \right]$

Comprobando :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$5) \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 7 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\frac{1}{7}R1 \\ -4R1+R2}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & \frac{8}{7} & -\frac{4}{7} & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\frac{7}{8}R2 \\ \frac{5}{7}R2+R1}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{8} & \frac{7}{8} \end{array} \right]$$

Comprobando :

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{8} \\ -\frac{4}{8} & \frac{7}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$6) \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\frac{1}{2}R1 \\ -R1+R2 \\ -2R1+R3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-\frac{2}{7}R2 \\ -\frac{3}{2}R2+R1 \\ 3R2+R3}} \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{6}{14} & \frac{2}{7} & \frac{6}{14} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & \frac{2}{14} & -\frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{6}{7} & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-7R3 \\ -\frac{2}{7}R3+R2 \\ \frac{6}{14}R3+R1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 6 & -7 \end{array} \right]$$

Comprobando :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 4 & 6 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &7) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \\
 &\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-3R_1+R_2 \\ -3R_1+R_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-\frac{1}{7}R_2 \\ -3R_2+R_1 \\ 6R_2+R_3}} \\
 &\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\frac{7}{9}R_3 \\ -\frac{5}{7}R_3+R_2 \\ \frac{1}{7}R_3+R_1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{7}{9} \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Comprobando:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{9} \\ -\frac{3}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{7}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &8) \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -3 \end{bmatrix} \\
 &\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-R_1+R_2 \\ -3R_1+R_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-R_2+R_1 \\ -R_2+R_3}} \\
 &\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right] \quad \text{No existe inversa para esta matriz.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9) \quad & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{-4}{3} \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
 & \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{-4}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-R1 \\ -R1+R2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\frac{3}{2}R2 \\ R2+R3}} \\
 & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{2R3 \\ \frac{1}{2}R3+R2 \\ R3+R1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Comprobando :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{-4}{3} \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 10) \quad & \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\
 & \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{-1}{2}R1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-R2} \\
 & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-\frac{1}{2}R3 \\ -2R3+R2 \\ -\frac{1}{2}R3+R1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Comprobando :

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.4 EJERCICIOS. Calcular la matriz inversa. (si es posible)

1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix};$ Respuesta: $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 8 & 6 \end{bmatrix};$ Respuesta: $\begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix};$ Respuesta: $\begin{bmatrix} -\frac{45}{71} & \frac{120}{71} \\ -\frac{60}{71} & \frac{18}{71} \end{bmatrix}$

6) $\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 7 & 12 & -4 \end{bmatrix}$

7) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix};$ Respuesta: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

8) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \\ 19 & -7 & 3 \end{bmatrix}$

9) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$ Respuesta: $\begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

10) $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 7 & -14 & 0 \end{bmatrix}$

3.5 DETERMINANTE DE UNA MATRIZ.

Dada una matriz cuadrada de orden n :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Se llama Determinante de A y se representa por $|A|$ ó también $\det(A)$, al número que se obtiene de la siguiente forma:

$$|A| = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in P_n} i(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

P_n Son las distintas permutaciones de n elemento (es decir, $n!$ elementos)

Por tanto, el determinante de una matriz de orden n estará formado por la suma de $n!$ Sumandos, cada uno de ellos formado por n factores, entre los que figura un solo elemento de cada fila y un solo elemento de cada columna de la matriz.

Es conveniente combinar un menor con un signo de $+$ o de $-$. Para este fin, definimos el cofactor (i, j) de A como:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

Con esta notación la definición se convierte en:

$$\det A_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{1j} C_{1j}$$

La definición anterior se conoce a menudo como el desarrollo por cofactores a lo largo del primer renglón. Es un hecho sorprendente que se tenga exactamente el mismo resultado a desarrollar a o largo de cualquier renglón (o incluso se cualquier columna).

Se resume este hecho como un teorema pero se pospone la demostración hasta el final de esta sección (puesto que es algo larga e interrumpiría la exposición si se presenta en este momento).

Teorema de expansión de Laplace

El determinante de una matriz de $n \times n$, $A = [a_{ij}]$, donde $n \geq 2$ puede ser calculado como:

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}C_{ij}$$

(La cual es la expansión por cofactores a la largo del i -ésimo renglón) y también como:

$$\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij}C_{ij}$$

(La cual es la expansión por cofactores a la largo del j -ésima columna)

Debido a que $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$, cada cofactor es el menor correspondiente con signos: + o -, con el signo correcto dado por el término $(-1)^{i+j}$ una manera rápida para determinar si el signo es + o - es recordar que los signos conforman un patrón “tablero de Ajedrez”:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

3.6 PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES.

La manera más eficiente de calcular determinantes es mediante el empleo de la reducción por renglones. Sin embargo, no todas las operaciones elementales por renglones dejan el determinante de una matriz sin cambios. El teorema siguiente resume las propiedades principales que necesita entender a fin de utilizar de manera eficiente la reducción por renglones.

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz cuadrada.

- Si A tiene un renglón (columna) cero, entonces $\det A = 0$
- Si B se obtiene al intercambiar dos renglones (columnas) de A , entonces $\det B = 0 = -\det A = 0$
- Si A tiene dos renglones (columnas) idénticos, entonces $\det A = 0$
- Si B se obtiene al multiplicar un renglón (columna) de A por k , entonces $\det B = 0 = k \det A = 0$
- Si A , B y C son idénticas excepto que i -ésimo renglón (columna) de C sea la suma de los i -ésimos renglones (columnas) de A y B , entonces $\det C = 0 = \det A + \det B$
- Si B se obtiene al sumar un múltiplo de un renglón (columna) de A a otro renglón (columna), entonces $\det B = \det A = 0$ columna

Sea $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ Una matriz de 2×2 se define el determinante de A por:

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Con frecuencia se denotará $\det A$ por:

$$|A| \quad \text{ó} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

El Determinante de una matriz $n \times n$ se definirá de manera inductiva. En otras palabras se usará lo que se sabe de un determinante de 2×2 , para definir un determinante de 3×3 , esto a su vez se usará para definir un determinante de 4×4 , etc.

Se comienza por definir un determinante de 3 x 3:

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \text{ Entonces :}$$

$$\det A = |A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

observe el signo menos antes del segundo término del lado derecho.

3.6 EJEMPLOS. Calcular los siguientes determinantes.

$$1) \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = (3)(7) - (4)(6) \\ = -3$$

$$2) \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 100 \end{vmatrix} = (0)(100) - (-1)(-1) \\ = -1$$

$$3) \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = (7)(10) - (4)(1) \\ = 66$$

$$4) \begin{vmatrix} + & - & + \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ = 1[(1)(0) - (1)(4)] - 0[(0)(0) - (4)(2)] + 3[(0)(1) - (2)(1)] \\ = 1(-4) - 0(-8) + 3(-2) \\ = -4 - 6 = -10$$

$$5) \begin{vmatrix} + & - & + \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ = -1[(1)(6) - (5)(4)] - 1[(2)(6) - (1)(4)] + 0[(2)(5) - (1)(1)] \\ = -1(6 - 20) - 1(12 - 4) + 0(10 - 1) \\ = -1(-14) - 1(8) + 0(-9) \\ = 14 - 8 = 6$$

$$6) \begin{vmatrix} + & - & + \\ 3 & -1 & 4 \\ 6 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ = 3[(3)(6) - (-1)(5)] + 1[(6)(6) - (2)(5)] + 4[(6)(-1) - (2)(3)] \\ = 3(18 + 5) + 1(36 - 10) + 4(-6 - 6) \\ = 69 + 26 - 48 = 47$$

$$7) \begin{vmatrix} + & - & + & - \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 3 & 0 \\ 9 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} + & - & + \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} + & - & + \\ 5 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 9 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} + & - & + \\ 5 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 9 & -1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} + & - & + \\ 5 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & 3 \\ 9 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

donde :

$$1 \begin{vmatrix} + & - & + \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1 \left[2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \right]$$

$$= 1[2[(3)(0) - (4)(0)] - 0[(0)(0) - (-1)(0)] + 0[(0)(4) - (-1)(3)]]$$

$$= 1[2(0) - 0(0) + 0(3)]$$

$$= 1(0) = 0$$

$$0 \begin{vmatrix} + & - & + \\ 5 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 9 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \left[5 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 9 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} \right]$$

$$= -0[5[(4)(0) - (3)(0)] - 0[(7)(0) - (9)(0)] + 0[(7)(3) - (9)(4)]]$$

$$= -0[5(0) - 0(0) + 0(15)]$$

$$= -0(0) = 0$$

$$0 \begin{vmatrix} + & - & + \\ 5 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 9 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \left[5 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 9 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} \right]$$

$$= 0[5[(0)(0) - (-1)(0)] - 2[(7)(0) - (9)(0)] + 0[(7)(-1) - (9)(0)]]$$

$$= 0[5(0) - 0(0) + 0(-7)]$$

$$= 0(0) = 0$$

$$0 \begin{vmatrix} + & - & + \\ 5 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & 3 \\ 9 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \left[5 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} \right]$$

$$= -0[5[(0)(4) - (-1)(3)] - 2[(7)(4) - (9)(3)] + 0[(7)(-1) - (9)(0)]]$$

$$= -0[5(3) - 2(1) + 0(-7)]$$

$$= -0(13) = 0$$

Por lo tanto :

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 3 & 0 \\ 9 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 + 0 - 0 = 0$$

$$8) \begin{vmatrix} + & - & + & - \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} + & - & + \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} + & - & + \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} + & - & + \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} + & - & + \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

donde :

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2 \left[\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \right]$$

$$= 2[1(1)(0) - (3)(5)] - 4[(0)(0) - (2)(5)] + 2[(0)(3) - (2)(1)]$$

$$= 2(-15 + 40 - 4)$$

$$= 2(21) = 42$$

$$-0 \begin{vmatrix} + & - & + \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -0 \left[\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right]$$

$$= 0[0[(1)(0) - (3)(5)] - 4[(0)(0) - (1)(5)] + 2[(0)(3) - (1)(1)]]$$

$$= 0(0 + 20 - 2)$$

$$= 0(18) = 0$$

$$3 \begin{vmatrix} + & - & + \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \left[\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right]$$

$$= 3[0[(0)(0) - (2)(5)] - 1[(0)(0) - (1)(5)] + 2[(0)(2) - (1)(0)]]$$

$$= 3(5)$$

$$= 15$$

$$-1 \begin{vmatrix} + & - & + \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \left[\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right]$$

$$= -1[0[(0)(3) - (2)(3)] - 1[(0)(3) - (1)(1)] + 4[(0)(2) - (1)(0)]]$$

$$= -1(1)$$

$$= -1$$

Por lo tanto :

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 42 + 0 + 15 - 1 = 56$$

3.6 EJERCICIOS. Calcular los siguientes determinantes

1) $|A| = \begin{vmatrix} -9 & -6 \\ -4 & -3 \end{vmatrix};$ *Re spuesta : $|A| = 3$*

2) $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}$

3) $|A| = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix};$ *Re spuesta : $|A| = -38$*

4) $|A| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{7} \\ \frac{3}{4} & \frac{6}{5} \end{vmatrix}$

5) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ *Re spuesta : $|A| = -10$*

6) $|A| = \begin{vmatrix} 11 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

7) $|A| = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ *Re spuesta : $|A| = -15$*

8) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

9) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ *Re spuesta : $|A| = 1$*

10) $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

3.7 MATRIZ ADJUNTA

Sea una matriz de 2×2 :

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Entonces su matriz adjunta se define como:

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Al calcular la adjunta de una matriz, no olvide transponer la matriz de cofactores.

Consideremos una matriz n -cuadrada $A = (a_{ij})$ sobre un cuerpo K . El adjunto de A , denotado por $\text{Adj. } A$, es la transpuesta de la matriz de cofactores de A :

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Por ejemplo:

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Los cofactores de los nueve elementos de A son:

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -17 \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \quad A_{13} = + \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -11 \quad A_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 7 \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3$$

La transpuesta de la matriz de los cofactores anteriores proporciona la adjunta de A:

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} -17 & -11 & 1 \\ 4 & 7 & -2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Aplicación del adjunto para hallar la matriz inversa

Observemos que esta propiedad nos permite hallar por otro método la inversa de una matriz.

Reconsidera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \text{adj } A = \begin{pmatrix} -17 & -11 & 1 \\ 4 & 7 & -2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -15 + 8 + 0 - 6 - 0 - 2 = -15 \neq 0.$$

Así pues, aplicando la propiedad anterior:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A) \text{ Se obtiene:}$$

$$A^{-1} = -1/15 \begin{pmatrix} -17 & -11 & 1 \\ 4 & 7 & -2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

3.7 EJEMPLOS. Calcular la matriz inversa por el método de la Matriz Adjunta.

$$1) \quad A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \text{ Por definición, para matrices } 2 \times 2: \text{Adj}A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$2) \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 7 \end{bmatrix} \text{ Por definición, para matrices } 2 \times 2: \text{Adj}A = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 5 \end{bmatrix}$$

$$3) \quad A = \begin{bmatrix} \overset{+}{6} & \overset{-}{-2} & \overset{+}{4} \\ \overset{-}{8} & \overset{+}{-5} & \overset{-}{2} \\ \overset{+}{3} & \overset{-}{1} & \overset{+}{7} \end{bmatrix}$$

$$\text{Sea } |A| = \begin{vmatrix} \overset{+}{6} & \overset{-}{-2} & \overset{+}{4} \\ \overset{-}{8} & \overset{+}{-5} & \overset{-}{2} \\ \overset{+}{3} & \overset{-}{1} & \overset{+}{7} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 8 & -5 & 2 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 8 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -210 - 12 + 32 - (-60 + 12 - 112) = -30$$

Y

$$A_{11} = + \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = -35 - 2 = -37 \quad A_{21} = - \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = -(-14 - 4) = 18$$

$$A_{12} = - \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = -(56 - 6) = -50 \quad A_{22} = + \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = 42 - 12 = 30$$

$$A_{13} = + \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = 8 + 15 = 23 \quad A_{23} = - \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = -(6 + 6) = -12$$

$$A_{31} = + \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = -4 + 20 = 16$$

$$A_{32} = - \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} = -(12 - 32) = 20$$

$$A_{33} = + \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 8 & -5 \end{bmatrix} = -30 + 16 = -14$$

Entonces :

$$\text{Adj}A = \begin{bmatrix} -37 & -50 & 23 \\ 18 & 30 & -12 \\ 16 & 20 & -14 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -37 & 18 & 16 \\ -50 & 30 & 20 \\ 23 & -12 & -14 \end{bmatrix}$$

Finalmente :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Adj} A = \frac{1}{-30} \begin{bmatrix} -37 & 18 & 16 \\ -50 & 30 & 20 \\ 23 & -12 & -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{37}{30} & \frac{3}{5} & -\frac{8}{5} \\ \frac{5}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{23}{30} & -\frac{2}{5} & \frac{7}{15} \end{bmatrix}$$

$$4) \quad A = \begin{bmatrix} \overset{+}{2} & \overset{-}{4} & \overset{+}{3} \\ \overset{-}{0} & \overset{+}{1} & \overset{-}{-1} \\ \overset{+}{3} & \overset{-}{5} & \overset{+}{7} \end{bmatrix}$$

$$\text{Sea } |A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 14 - 12 + 0 - (9 - 10 + 0) = 3$$

$$A_{11} = + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = 7 + 5 = 12 \quad A_{21} = - \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = -(28 - 15) = -13$$

$$A_{12} = - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = -(0 + 3) = -3 \quad A_{22} = + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = 14 - 9 = 5$$

$$A_{13} = + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = 0 - 3 = -3 \quad A_{23} = - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = -(10 - 12) = 2$$

$$A_{31} = + \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -4 - 3 = -7$$

$$A_{32} = - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -(-2 - 0) = 2$$

$$A_{33} = + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 - 0 = 2$$

Entonces :

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 12 & -3 & -3 \\ -13 & 5 & 2 \\ -7 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Finalmente :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Adj } A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -\frac{13}{3} & -\frac{7}{3} \\ -1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$5) \quad A = \begin{bmatrix} + & - & + \\ 3 & 2 & 1 \\ - & + & - \\ 0 & 2 & 2 \\ + & - & + \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Sea } |A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -6 - 6 = -12$$

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4 \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -0 \quad A_{22} = + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{13} = + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2$$

$$A_{32} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{33} = + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

Entonces :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -3 \\ 2 & -6 & 6 \end{bmatrix}^{-T} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Finalmente :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Adj } A = -\frac{1}{12} \begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
6) \quad & \begin{bmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{0} & \overset{+}{0} & \overset{-}{1} \\ \overset{-}{-1} & \overset{+}{2} & \overset{-}{1} & \overset{+}{0} \\ \overset{+}{0} & \overset{-}{0} & \overset{+}{-1} & \overset{-}{1} \\ \overset{-}{1} & \overset{+}{2} & \overset{-}{-2} & \overset{+}{0} \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} - 0 \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\
& + 0 \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\
& = 1(2 - (-4)) - 0 + 0 - 1(-2 - (2)) = 1(6) - 0 + 0 - 1(-4) = 6 + 4 = 10
\end{aligned}$$

$$A_{11} = + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} = 2 - 4(-4) = 6$$

$$A_{12} = - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = -(1 - 2) = 1$$

$$A_{13} = + \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 2 - (-2) = 4$$

$$A_{14} = - \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = -(-2 - 2) = 4$$

$$A_{21} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} = -(0 - (-2)) = -2$$

$$A_{22} = + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = 0 - (-1 - 2) = 3$$

$$A_{23} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = -(0 - 2) = 2$$

$$A_{24} = + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 0 - (-2) = 2$$

$$A_{31} = + \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right] = -4 - 2 = -6$$

$$A_{32} = - \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right] = -(2 - 1) = -1$$

$$A_{33} = + \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] = -2 - 2 = -4$$

$$A_{34} = - \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & 2 \end{array} \right] = -(-4 - 2) = 6$$

$$A_{41} = - \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right] = -(-2 - 0) = 2$$

$$A_{42} = + \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right] = 1 + 1 - 0 = 2$$

$$A_{43} = - \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] = -(2 - 0) = -2$$

$$A_{44} = + \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right] = -2$$

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{cccc} 6 & 1 & 4 & 4 \\ -2 & 3 & 2 & 2 \\ -6 & -1 & -4 & 6 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \end{array} \right]^T = \left[\begin{array}{cccc} 6 & -2 & -6 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 & -2 \\ 4 & 2 & 6 & -2 \end{array} \right];$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Adj } A = \frac{1}{10} \left[\begin{array}{cccc} 6 & -2 & -6 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 & -2 \\ 4 & 2 & 6 & -2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right]$$

3.7 EJERCICIOS. Calcule la matriz inversa por el método de la Matriz Adjunta.

$$1) \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{Respuesta : } A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2) \quad A = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{3}{2} \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$3) \quad A = \begin{bmatrix} -8 & 6 & 3 \\ 7 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{Respuesta : } A^{-1} = -\frac{1}{317} \begin{bmatrix} 7 & -39 & 12 \\ -53 & -67 & 45 \\ 19 & 30 & -58 \end{bmatrix}$$

$$4) \quad A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & -8 \end{bmatrix}$$

$$5) \quad A = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} & \frac{1}{3} & -\frac{9}{7} \\ -6 & -1 & 4 \\ \frac{3}{2} & -\frac{8}{7} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \quad \text{Respuesta : } A^{-1} = -\frac{98}{193} \begin{bmatrix} \frac{29}{14} & \frac{187}{294} & \frac{1}{21} \\ 21 & \frac{57}{14} & \frac{30}{7} \\ \frac{117}{14} & \frac{145}{98} & \frac{8}{7} \end{bmatrix}$$

$$6) \quad A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 4 \\ 8 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$7) \quad A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{Respuesta : } A^{-1} = -\frac{1}{651} \begin{bmatrix} -129 & -81 & 58 & 229 \\ 96 & 30 & -134 & -125 \\ 15 & -36 & 74 & -67 \\ -60 & 144 & -79 & -166 \end{bmatrix}$$

3.8 SOLUCION DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES A TRAVES DE LA INVERSA.

Teorema. Si A es una matriz invertible de $n \times n$, entonces para cada matriz B de $n \times 1$, el sistema de ecuaciones $AX = B$ tiene exactamente una solución, dada por:

$$X = A^{-1}B$$

Ejemplo: Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$$

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3$$

$$x_1 + 8x_3 = 17$$

En su forma matricial, el sistema se puede escribir como $AX = B$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Una vez que se muestre que A es invertible, que:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Por el anterior teorema, la solución del sistema es

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Es decir, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$.

3.8 EJEMPLOS. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales a través de la inversa.

$$\begin{aligned} 1) \quad & 2x_1 - 3x_2 = 4 \\ & -x_1 + 5x_2 = -3 \end{aligned}$$

De la matriz de coeficientes correspondiente :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{2}R1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{2}{7}R2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array} \right]$$

Por lo tanto:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}, \text{ entonces :}$$

$$\vec{x} = A^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{20}{7} - \frac{9}{7} \\ \frac{4}{7} - \frac{6}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{7} \\ -\frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

Finalmente se tiene :

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{11}{7} \\ -\frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & 2x_1 - 6x_2 = -3 \\ & 4x_1 - 3x_2 = 8 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -6 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{2}R1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 9 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{9}R2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{array} \right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = A^{-1}b = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{6} + \frac{8}{3} \\ \frac{6}{9} + \frac{8}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{6} \\ \frac{14}{9} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad & x_1 + x_2 = 4 \\ & 2x_1 - 3x_2 = 7 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-2R1+R2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{5}R2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = A^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{12}{5} + \frac{7}{5} \\ \frac{8}{5} - \frac{7}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$4) \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 = -5$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-2R1+R2 \\ -R1+R3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-R2+R1 \\ 2R2+R3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-\frac{1}{5}R3 \\ R3+R2 \\ -2R3+R1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-1-2 \\ -3+3+1 \\ 3-2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$5) \quad x_1 - x_2 - x_3 = 2$$

$$3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 16$$

$$2x_1 - x_2 - x_3 = 9$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-3R1+R2 \\ -2R1+R3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R2+R1 \\ -R2+R3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-\frac{1}{2}R3 \\ -5R3+R2 \\ -4R3+R1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \begin{bmatrix} 0-16+18 \\ -1-24+\frac{45}{2} \\ -1+8-\frac{9}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 16 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-16+18 \\ -1-24+\frac{45}{2} \\ -1+8-\frac{9}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad & 5x_1 + x_2 - x_3 = 14 \\
 & x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -9 \\
 & x_1 - 2x_2 + 10x_3 = -30
 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\frac{1}{5}R1 \\ -R1+R2 \\ -R1+R3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{26}{5} & \frac{11}{5} & -\frac{1}{5} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{11}{5} & \frac{51}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-\frac{5}{26}R2 \\ -\frac{1}{5}R2+R1 \\ \frac{11}{5}R2+R3}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{3}{26} & \frac{5}{26} & \frac{1}{26} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{11}{26} & \frac{1}{26} & -\frac{5}{26} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{241}{26} & -\frac{2}{26} & -\frac{11}{26} & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-\frac{26}{241}R3 \\ \frac{11}{26}R3+R2 \\ \frac{3}{26}R3+R1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{46}{241} & \frac{8}{241} & \frac{3}{241} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{241} & -\frac{51}{241} & \frac{11}{241} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{241} & -\frac{11}{241} & \frac{26}{241} \end{array} \right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{46}{241} & \frac{8}{241} & \frac{3}{241} \\ \frac{8}{241} & -\frac{51}{241} & \frac{11}{241} \\ -\frac{3}{241} & -\frac{11}{241} & \frac{26}{241} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ -9 \\ -30 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \begin{bmatrix} \frac{46}{241} & \frac{8}{241} & \frac{3}{241} \\ \frac{8}{241} & -\frac{51}{241} & \frac{11}{241} \\ -\frac{3}{241} & -\frac{11}{241} & \frac{26}{241} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ -9 \\ -30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{662}{241} \\ \frac{901}{241} \\ \frac{837}{241} \end{bmatrix}$$

$$7) \quad x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 10$$

$$3x_1 + 5x_2 - x_4 = 2$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 5$$

$$-4x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 4$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} -3R_1+R_2 \\ -2R_1+R_3 \\ 4R_1+R_4 \end{array}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 9 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} -R_2 \\ -2R_2+R_1 \\ 3R_2+R_3 \\ -7R_2+R_4 \end{array}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -10 & -2 & -5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 3 & 7 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -33 & -9 & -17 & 7 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} \frac{1}{13}R_3 \\ 3R_3+R_4 \\ -6R_3+R_2 \\ 10R_3+R_1 \end{array}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{13} & \frac{5}{13} & -\frac{4}{13} & \frac{10}{13} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{5}{13} & -\frac{6}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{13} & \frac{7}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{1}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{18}{13} & \frac{10}{13} & -\frac{8}{13} & \frac{33}{13} & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} -\frac{13}{18}R_4 \\ -\frac{5}{13}R_4+R_3 \\ \frac{5}{13}R_4+R_2 \\ -\frac{4}{13}R_4+R_1 \end{array}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{4}{3} & \frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{7}{6} & -\frac{5}{18} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{11}{6} & -\frac{13}{18} \end{array} \right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{4}{3} & \frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{7}{6} & -\frac{5}{18} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{11}{6} & -\frac{13}{18} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$x = A^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{4}{3} & \frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{7}{6} & -\frac{5}{18} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{11}{6} & -\frac{13}{18} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{110}{9} \\ -\frac{185}{18} \\ \frac{55}{6} \\ -\frac{301}{18} \end{bmatrix}$$

$$8) \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4$$

$$-x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 8$$

$$x_2 + x_3 - 2x_4 = 10$$

$$6x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 5$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} \frac{1}{2}R1 \\ R1+R2 \\ -6R1+R4 \end{array}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 6 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -8 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} -\frac{2}{7}R2 \\ -\frac{1}{2}R2+R1 \\ -R2+R3 \\ 2R2+R4 \end{array}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \frac{13}{7} & \frac{12}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{12}{7} & -\frac{6}{14} & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{19}{7} & -\frac{11}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{59}{7} & -\frac{72}{7} & -\frac{23}{7} & -\frac{4}{7} & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} \frac{7}{19}R3 \\ \frac{59}{7}R3+R4 \\ \frac{12}{7}R3+R2 \\ -\frac{13}{7}R3+R1 \end{array}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{53}{19} & \frac{9}{19} & -\frac{1}{19} & -\frac{13}{19} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{27}{19} & -\frac{1}{19} & -\frac{2}{19} & \frac{12}{19} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{19} & \frac{1}{19} & \frac{2}{19} & \frac{7}{19} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{261}{19} & -\frac{54}{19} & \frac{6}{19} & \frac{59}{19} & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} -\frac{19}{261}R4 \\ \frac{11}{19}R4+R3 \\ \frac{27}{19}R4+R2 \\ -\frac{53}{19}R4+R1 \end{array}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{29} & \frac{1}{87} & -\frac{14}{261} & \frac{53}{261} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{7}{29} & -\frac{4}{29} & \frac{9}{29} & -\frac{3}{29} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{29} & \frac{8}{87} & \frac{62}{261} & -\frac{11}{261} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{6}{29} & -\frac{2}{87} & -\frac{59}{261} & -\frac{19}{261} \end{array} \right]$$

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{cccc} -\frac{3}{29} & \frac{1}{87} & -\frac{14}{261} & \frac{53}{261} \\ \frac{7}{29} & -\frac{4}{29} & \frac{9}{29} & -\frac{3}{29} \\ \frac{5}{29} & \frac{8}{87} & \frac{62}{261} & -\frac{11}{261} \\ \frac{6}{29} & -\frac{2}{87} & -\frac{59}{261} & -\frac{19}{261} \end{array} \right]$$

$$\rightarrow x = A^{-1}b = \left[\begin{array}{cccc} -\frac{3}{29} & \frac{1}{87} & -\frac{14}{261} & \frac{53}{261} \\ \frac{7}{29} & -\frac{4}{29} & \frac{9}{29} & -\frac{3}{29} \\ \frac{5}{29} & \frac{8}{87} & \frac{62}{261} & -\frac{11}{261} \\ \frac{6}{29} & -\frac{2}{87} & -\frac{59}{261} & -\frac{19}{261} \end{array} \right] \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{41}{261} \\ \frac{71}{29} \\ \frac{937}{261} \\ -\frac{517}{261} \end{bmatrix}$$

3.8 EJERCICIOS. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales a través de la inversa.

$$\begin{aligned} 1) \quad & -6x_1 + 5x_2 = 8 \\ & -\frac{5}{6}x_1 - 5x_2 = 4 \end{aligned}$$

$$\text{Respuesta : } x_1 = -\frac{71}{41}, \quad x_2 = -\frac{104}{205}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & 9x_1 + 6x_2 = 3 \\ & 7x_1 + 8x_2 = 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad & -2x_1 + x_2 = -4 \\ & -x_1 + 5x_2 = 6 \end{aligned}$$

$$\text{Respuesta : } x_1 = -\frac{26}{9}, \quad x_2 = \frac{16}{95}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad & -x_1 + 12x_2 + 14x_3 = 20 \\ & 8x_1 + 43x_2 - 5x_3 = -31 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 = -25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \quad & -84x_1 + 23x_2 - 63x_3 = 14 \\ & 13x_1 - 87x_2 - 25x_3 = 16 \\ & 21x_1 - 15x_2 + 25x_3 = 96 \end{aligned}$$

$$\text{Respuesta : } x_1 = -\frac{4186}{629}, \quad x_2 = -\frac{2086}{269}, \quad x_3 = \frac{4680}{629}$$

$$\begin{aligned} 6) \quad & 5x_1 + x_2 - x_3 = 14 \\ & -36x_1 + 52x_2 + 24x_3 = -98 \\ & -55x_1 + 92x_2 + 10x_3 = 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7) \quad & 78x_1 + 12x_2 + 2x_3 = -45 \\ & 36x_1 + 56x_2 - x_4 = -25 \\ & -41x_1 + 96x_2 - x_3 + 71x_4 = -69 \\ & 33x_1 - x_2 + x_3 - 52x_4 = -78 \end{aligned}$$

$$\text{Respuesta : } x_1 = \frac{746485}{406716}, \quad x_2 = -\frac{163417}{101679}, \quad x_3 = -\frac{11447339}{135572}, \quad x_4 = \frac{108998}{101679}$$

$$\begin{aligned} 8) \quad & -13x_1 - 51x_2 - 30x_3 - 26x_4 = 34 \\ & 22x_1 - 41x_2 + 55x_3 + 19x_4 = 88 \\ & -45x_1 + 59x_2 + 36x_3 - 22x_4 = 20 \\ & 61x_1 + 87x_2 + 69x_3 + 48x_4 = -52 \end{aligned}$$

3.9 SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES POR LA REGLA DE CRAMER

Regla de Cramer: Sea una matriz de $n \times n$ y suponga que $\det A \neq 0$. Entonces la solución única al sistema $Ax = b$ está dada por:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_i = \frac{D_i}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

Demostración. La solución $Ax = b$ es $x = A^{-1}b$. Pero

$$A^{-1}b = \frac{1}{D}(\text{adj } A)b = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Ahora bien $(\text{Adj } A)b$ es un n -vector cuya componente j es:

$$(A_{1j} A_{2j} \dots A_{nj}) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \dots + b_n A_{nj}$$

Considere la matriz A_j :

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{13} & a_{2n} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Si se expande el determinante A_j respecto a su columna j , se obtiene:

$$D_j = b_1(\text{cofactor de } b_1) + b_2(\text{cofactor de } b_2) + \dots + b_n(\text{cofactor de } b_n)$$

Pero para encontrar el cofactor de b_1 se elimina el renglón i y la columna de j de A_j . pero la columna j de A_j es b , y se elimina se tendrá simplemente el menor ij de A entonces:

$$\text{Cofactor de } b_i \text{ en } A_j = A_{ij}$$

3.9 EJEMPLOS. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones por la regla Cramer.

1) $3x_1 - x_2 = 0$

$4x_1 + 2x_2 = -3$

$$A = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 4 = 10 \quad A_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 5 = 5 \quad A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 0 = 15$$

$$x_1 = \frac{A_1}{A} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{A_2}{A} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2},$$

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

2) $10x_1 - \frac{7}{2}x_2 = 8$

$\frac{3}{8}x_1 + 3x_2 = -10$

$$A = \begin{vmatrix} 10 & -\frac{7}{2} \\ \frac{3}{8} & 3 \end{vmatrix} = 30 + \frac{21}{16} = \frac{501}{16}$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} 8 & -\frac{7}{2} \\ -10 & 3 \end{vmatrix} = 24 - \frac{70}{2} = -11$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 10 & 8 \\ \frac{3}{8} & -10 \end{vmatrix} = -100 - 3 = -103$$

$$x_1 = \frac{A_1}{A} = -\frac{11}{\frac{501}{16}} = -\frac{176}{501}, \quad x_2 = \frac{A_2}{A} = -\frac{103}{\frac{501}{16}} = -\frac{1648}{501},$$

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} -\frac{176}{501} \\ -\frac{1648}{501} \end{bmatrix}$$

3) $2x_1 + 3x_2 = -1$

$-7x_1 + 4x_2 = 47$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -7 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 21 = 29 \quad A_1 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 47 & 4 \end{vmatrix} = -4 - 141 = -145 \quad A_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 47 \end{vmatrix} = 94 - 7 = 87$$

$$x_1 = \frac{A_1}{A} = -\frac{145}{29} = -5, \quad x_2 = \frac{A_2}{A} = \frac{87}{29} = 3,$$

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad & 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\
 & x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\
 & -x_1 + x_2 + 3x_3 = 1
 \end{aligned}$$

$$A = \left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right| = 12 - 2 - (-2 + 2 + 6) = 11 - 6 = 5$$

$$A_1 = \left| \begin{array}{ccc|cc} 7 & 2 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right| = 42 + 2 - (2 + 7) = 44 - 9 = 35$$

$$A_2 = \left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & 7 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right| = -7 + 1 - (2 + 21) = -6 - 23 = -29$$

$$A_3 = \left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & 2 & 7 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right| = 4 + 7 - (-14 + 2) = 11 + 12 = 23$$

$$x_1 = \frac{A_1}{A} = \frac{35}{5} = 7, \quad x_2 = \frac{A_2}{A} = -\frac{29}{5}, \quad x_3 = \frac{A_3}{A} = \frac{23}{5}$$

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} 7 \\ -\frac{29}{5} \\ \frac{23}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
5) \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\
& 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 5 \\
& 8x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 11
\end{aligned}$$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = -20 - 24 + 6 - (-16 - 12 + 15) = -25$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \\ 11 & 2 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 5 & -2 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = -60 - 33 + 10 - (-22 - 36 + 25) = -50$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 6 & 5 & -3 \\ 8 & 11 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \\ 8 & 11 \end{vmatrix} = 50 - 144 + 33 - (40 - 66 + 90) = -125$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & 5 \\ 8 & 2 & 11 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = -44 + 40 + 36 - (-96 + 20 + 33) = 75$$

$$x_1 = \frac{A_1}{A} = \frac{-20}{-25} = 2, \quad x_2 = \frac{A_2}{A} = \frac{-125}{-25} = 5, \quad x_3 = \frac{A_3}{A} = -\frac{75}{5} = -3$$

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad & 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\
 & x_1 + x_3 = 2 \\
 & -x_2 + 5x_3 = 1
 \end{aligned}$$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 1 - (0 - 2 + 5) = 1 + 2 - 5 = -2$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \\ 11 & 2 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 5 & -2 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = -60 - 33 + 10 - (-22 - 36 + 25) = -50$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 6 & 5 & -3 \\ 8 & 11 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \\ 8 & 11 \end{vmatrix} = 50 - 144 + 33 - (40 - 66 + 90) = -125$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & 5 \\ 8 & 2 & 11 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = -44 + 40 + 36 - (-96 + 20 + 33) = 75$$

$$x_1 = \frac{A_1}{A} = \frac{-20}{-25} = 2, \quad x_2 = \frac{A_2}{A} = \frac{-125}{-25} = 5, \quad x_3 = \frac{A_3}{A} = -\frac{75}{5} = -3$$

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

3.9 EJERCICIOS. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones por la regla Cramer.

1) $4x_1 + 8x_2 = 24$

$-2x_1 - 6x_2 = 30$

Respuesta : $\vec{X} = \begin{bmatrix} 48 \\ -21 \end{bmatrix}$

2) $5x_1 - 7x_2 = 5$

$3x_1 + 9x_2 = 22$

3) $4x_1 + 7x_2 - 9x_3 = 30$

$12x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 45$

$6x_1 - 18x_2 - x_3 = 42$

Respuesta : $\vec{X} = \begin{bmatrix} \frac{4677}{1640} \\ -\frac{39}{41} \\ \frac{2631}{820} \end{bmatrix}$

4) $2x_1 - 6x_2 - 5x_3 = 19$

$3x_1 + 4x_3 = 8$

$7x_1 + 2x_2 - x_3 = 15$

5) $5x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 40$

$2x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 16$

$10x_2 + 7x_3 - 9x_4 = 15$

$-9x_1 - 4x_2 - 2x_3 - 8x_4 = -30$

Respuesta : $X = \begin{bmatrix} \frac{3749}{421} \\ -\frac{1500}{421} \\ \frac{933}{842} \\ -\frac{4011}{842} \end{bmatrix}$

6) $3x_1 - 3x_2 - x_4 = 6$

$5x_1 - x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 25$

$-8x_1 + 33x_2 + 2x_3 = 23$

$7x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 9x_4 = 8$

4. ESPACIOS VECTORIALES

4.1 Definición. Un espacio vectorial real V es un conjunto de objetos, llamados vectores, junto con dos operaciones llamadas suma y multiplicación por un escalar que satisfacen los 10 axiomas o propiedades siguientes.

Propiedades de un Espacio Vectorial.

- 1) Si $x \in V$ y $y \in V$, entonces $x + y \in V$ (cerradura bajo la suma).
- 2) Para todo x, y y z en V , $(x + y) + z = x + (y + z)$ (ley asociativa de la suma de vectores).
- 3) Existe un vector $0 \in V$ tal que para todo $x \in V$, $x + 0 = 0 + x = x$ (el 0 se llama vector cero o idéntico aditivo).
- 4) Si $x \in V$, existe un vector $-x$ en V tal que $x + (-x) = 0$ ($-x$ se llama inverso aditivo de x).
- 5) Si x y y están en V , entonces $x + y = y + x$ (ley conmutativa de la suma de vectores).
- 6) Si $x \in V$ y α es un escalar, entonces $\alpha x \in V$ (cerradura bajo la multiplicación por un escalar).
- 7) Si x y y están en V y α es un escalar, entonces $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (primera ley distributiva).
- 8) Si $x \in V$ y α y β son escalares, entonces $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (segunda ley distributiva).
- 9) Si $x \in V$ y α y β son escalares, entonces $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ (ley asociativa de la multiplicación por escalares).
- 10) Para cada vector $x \in V$, $1x = x$

Nota: no es difícil demostrar que el idéntico aditivo y el inverso aditivo en un espacio vectorial son únicos.

En la práctica, verificar los diez axiomas puede ser tedioso. En adelante se verificarán solo aquellos axiomas que no son obvios.

4.1 EJEMPLOS. Determine si el conjunto dado, junto con las operaciones especificadas de multiplicación y adición por escalares son un espacio vectorial.

1) El conjunto de todos los vectores en R^2 de la forma $\begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}$ en las operaciones vectoriales habituales de adición y multiplicación por escalares.

Solución:

$$u = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} ; v = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Aplicando las propiedades a este conjunto :

$$1) \quad u + v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

$$6) \quad cu = c \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_1 \end{bmatrix}$$

$$2) \quad \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} \right)$$

$$3) \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} + 0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$$4) \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} + \left(- \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$5) \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$$7) \quad c \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) = c \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$8) \quad (c + d) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$$9) \quad c \left(d \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} \right) = cd \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$$10) \quad 1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, como el conjunto dado cumple con los diez axiomas , es un espacio vectorial.

2) El conjunto de todos los vectores $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ en R^2 con $x \geq 0, y \geq 0$ con las operaciones vectoriales habituales de adición y multiplicación por escalar.

Solución:

$$u = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} ; v = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Aplicando las propiedades a este conjunto :

1) $u + v = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$ *si la cumple*

6) $cu = c \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cy_1 \end{bmatrix}$ *no la cumple*

Ya que, si c toma valores negativos ($c < 0$) el resultado ya no se ubica en el primer cuadrante y no se cumple la condición $x \geq 0, y \geq 0$

Por lo que se concluye que no es un espacio vectorial.

3) El conjunto de todos los vectores $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ en R^2 con $xy \geq 0$, (es decir en el primer o tercer cuadrante) con las operaciones vectoriales habituales de adición y multiplicación por escalar.

Solución:

$$u = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} ; v = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Aplicando las propiedades a este conjunto :

$$1) u + v = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} \text{ como resultado se ubica en el primer o tercer cuadrante}$$

$$6) cu = c \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cy_1 \end{bmatrix}$$

Si $c > 0$ el resultado se ubica en el primer cuadrante

Si $c < 0$ el resultado se ubica en el tercer cuadrante

$$2) \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} \right)$$

$$3) \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$4) \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \left(- \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$5) \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$7) c \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \right) = c \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$8) (c + d) \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

si la suma de $(c + d)$ es positiva o negativo el resultado se ubica en el primer o tercer cuadrante

$$9) c \left(d \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \right) = cd \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

si la multiplicación de (cd) es positiva o negativo el resultado se ubica en el primer o tercer cuadrante

$$10) 1 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, como el conjunto dado cumple con los diez axiomas, es un espacio vectorial.

.

4) El conjunto de todos los vectores en R^2 de la forma $\begin{bmatrix} z \\ \bar{z} \end{bmatrix}$ con la operaciones habituales de adición y multiplicación por escalares.

Solución:

$$u = \begin{bmatrix} z_1 \\ \bar{z}_1 \end{bmatrix} ; v = \begin{bmatrix} z_2 \\ \bar{z}_2 \end{bmatrix}$$

Aplicando las propiedades a este conjunto :

$$1) u + v = \begin{bmatrix} z_1 \\ \bar{z}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_2 \\ \bar{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + ib_1 \\ a_1 - ib_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 + ib_2 \\ a_2 - ib_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \\ (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2) \end{bmatrix} \text{ si se cumple}$$

$$6) cu = c \begin{bmatrix} z_1 \\ \bar{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(a + ib) \\ c(a - ib) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca + icb \\ ca - icb \end{bmatrix} \text{ si se cumple}$$

pero con $c < 0$

$$cu = \begin{bmatrix} -ca - icb \\ -ca + icb \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(ca + icb) \\ -(ca - icb) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \\ -\bar{z} \end{bmatrix}$$

Cambia su forma con respecto al conjunto dado originalmente, por lo tanto no es un espacio vectorial

5) El conjunto de matrices de la forma $\begin{bmatrix} a+1 & 0 \\ 0 & a+1 \end{bmatrix}$ en M_{22} . Con las operaciones vectoriales habituales de adición y multiplicación por escalares.

Solución:

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_1 + 1 & 0 \\ 0 & a_1 + 1 \end{bmatrix} ; M_2 = \begin{bmatrix} a_2 + 1 & 0 \\ 0 & a_2 + 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1) M_1 + M_2 &= \begin{bmatrix} a_1 + 1 & 0 \\ 0 & a_1 + 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 + 1 & 0 \\ 0 & a_2 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + 2 & 0 \\ 0 & a_1 + a_2 + 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (a_1 + a_2) + 2 & 0 \\ 0 & (a_1 + a_2) + 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por lo que tal estructura cambia con respecto al conjunto de matrices dadas originalmente. Por lo tanto no es un espacio vectorial.

6) El conjunto de matrices diagonales de 3x3 bajo la suma y multiplicación de matrices por escalares.

Solución:

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix} ; M_2 = \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix}$$

$$1) M_1 + M_2 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 + a_2 \end{bmatrix}$$

$$6) cM_1 = c \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_1 & 0 & 0 \\ 0 & ca_1 & 0 \\ 0 & 0 & ca_1 \end{bmatrix}$$

$$2) \left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \right)$$

$$3) \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix} + 0 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix}$$

$$4) \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix} + \left(- \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$5) \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix}$$

$$7) \quad c \left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix} \right) = c \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix}$$

$$8) \quad (c + d) \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix}$$

$$9) \quad c \left(d \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix} \right) = c d \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix}$$

$$10) \quad 1 \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto el conjunto dado cumple con los diez axiomas y es un espacio vectorial.

4.1 EJERCICIOS. Determine si el conjunto dado, junto con las operaciones especificadas de multiplicación y adición por escalares son un espacio vectorial.

1) $\{(x, y) : y \leq 0; x, y \text{ reales}\}$ con la suma de vectores y multiplicación por escalares usuales.

RESPUESTA: No constituye un espacio vectorial porque no cumple las propiedades (4) y (6), solo se cumple si $c < 0$ para la propiedad (6).

2) El conjunto de todos los vectores $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ en R^2 con $x \geq y$ con las operaciones vectoriales habituales de adición y multiplicación por escalares.

3) El conjunto de los vectores en R^3 de la forma $\begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix}$ con la operaciones habituales de suma y multiplicación por un escalar.

RESPUESTA: Si constituye un espacio vectorial porque cumple con las diez propiedades.

4) Los vectores en el plano que están en el primer cuadrante con la operaciones habituales de suma y multiplicación por un escalar.

5) El conjunto de todas las matrices triangulares superiores de 2×2 con las operaciones matriciales habituales de adición y multiplicación por escalares.

RESPUESTA: Si constituye un espacio vectorial porque cumple con las diez propiedades.

6) El conjunto de las matrices de 2×2 que tienen la forma $\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$ bajo la suma y multiplicación por escalares usuales.

4.2 SUBESPACIOS VECTORIALES

Definición. Sea H un subconjunto no vacío de un espacio vectorial V y suponga que H es en si un espacio vectorial bajo las operaciones de suma y multiplicación por un escalar definidas en V . Entonces se dice que H es un subespacio de V .

Nota: se puede decir que el subespacio H hereda las operaciones del espacio vectorial “padre” V .

Propiedades de un Subespacio Vectorial

- 1) Si $x \in H$ y $y \in H$, entonces $x + y \in H$
- 2) Si $x \in H$, entonces $\alpha x \in H$ para todo escalar α .

Las propiedades anteriores contienen un hecho que por su importancia merece que se le haga mención explícitamente:

Todo subespacio de un espacio vectorial V contiene al 0 o elemento nulo.

Este hecho con frecuencia facilita ver si un subconjunto de V en particular no es un subespacio de V . Es decir si un subconjunto no contiene al 0, entonces no es un subespacio. Note que el vector cero en H , un subespacio de V , es el mismo que el vector cero en V .

4.2 EJEMPLOS. Determine en los siguientes ejercicios si W es un subespacio de V .

1)

$$V = R^3; W = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ a \end{bmatrix} \right\}$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_1 \end{bmatrix}; W_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ 0 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$1) W_1 + W_2 = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ 0 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ 0 \\ a_1 + a_2 \end{bmatrix}$$

$$2) cW = c \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_1 \\ 0 \\ ca_1 \end{bmatrix}$$

$$3) \text{ con } a = 0; \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

contiene al elemento nulo, por lo tanto W es un subespacio de $V = R^3$

2)

$$V = R^3; W = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ -a \\ 2a+1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ -a_1 \\ 2a_1+1 \end{bmatrix}; W_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ -a_2 \\ 2a_2+1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1) W_1 + W_2 &= \begin{bmatrix} a_1 \\ -a_1 \\ 2a_1+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ -a_2 \\ 2a_2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2 \\ -a_1-a_2 \\ (2a_1+1)+(2a_2+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2 \\ -(a_1+a_2) \\ 2a_1+2a_2+2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1+a_2 \\ -(a_1+a_2) \\ 2(a_1+a_2)+2 \end{bmatrix} \text{ no cumple con la propiedad de la cerradura} \end{aligned}$$

$$2) cW = c \begin{bmatrix} a_1 \\ -a_1 \\ 2a_1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_1 \\ -ca_1 \\ c(2a_1+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_1 \\ -ca_1 \\ c2a_1+c1 \end{bmatrix}$$

$$3) \text{ con } a = 0; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ No cumple con el elemento nulo.}$$

por lo tanto W no es un subespacio de $V = R^3$

3)

$$V = P_2; W = \{bx + cx^2\}$$

$$W_1 = b_1x + c_1x^2; W_2 = b_2x + c_2x^2$$

$$1) W_1 + W_2 = (b_1x + c_1x^2) + (b_2x + c_2x^2) = x(b_1 + b_2) + x^2(c_1 + c_2)$$

$$2) cW = c(b_1x + c_1x^2) = cb_1x + cc_1x^2$$

$$3) \text{ con } b = c = 0; 0x + 0x^2 = 0$$

contiene al elemento nulo, por lo tanto W es un subespacio de $V = P_2$

4)

$$V = R^3; W = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ a+b+1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_1 + b_1 + 1 \end{bmatrix}; W_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ a_2 + b_2 + 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1) W_1 + W_2 &= \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_1 + b_1 + 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ a_2 + b_2 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ (a_1 + b_1 + 1) + (a_2 + b_2 + 1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) + 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

no cumple con la propiedad de la cerradura, ya que 2 no es igual al elemento del subconjunto original.

$$2) cW = c \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_1 + b_1 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_1 \\ cb_1 \\ c(a_1 + b_1 + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_1 \\ cb_1 \\ ca_1 + cb_1 + c1 \end{bmatrix}$$

$$3) \text{ con } a = b = 0; \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_1 + b_1 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ No cumple con el elemento nulo.}$$

por lo tanto W no es un subespacio de $V = R^3$

5)

$$V = \mathbb{R}^3; W = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ |a| \end{bmatrix} \right\}$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ |a_1| \end{bmatrix}; W_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ |a_2| \end{bmatrix}$$

$$1) W_1 + W_2 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ |a_1| \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ |a_2| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ |a_1| + |a_2| \end{bmatrix}$$

$$2) cW = c \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ |a_1| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_1 \\ cb_1 \\ c|a_1| \end{bmatrix}$$

$$3) \text{ con } a = b = 0; \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ |a_1| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

contiene al elemento nulo, por lo tanto W es un subespacio de $V = \mathbb{R}^3$

6)

$$V = M_{22}; W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & 2a \end{bmatrix} \right\}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & 2a_1 \end{bmatrix}; M_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & 2a_2 \end{bmatrix}$$

$$1) M_1 + M_2 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & 2a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & 2a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_1 + a_2) & (b_1 + b_2) \\ (b_1 + b_2) & (2a_1 + 2a_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a_1 + a_2) & (b_1 + b_2) \\ (b_1 + b_2) & 2(a_1 + a_2) \end{bmatrix}$$

$$2) cW = c \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & 2a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_1 & cb_1 \\ cb_1 & c2a_1 \end{bmatrix}$$

$$3) \text{ con } a = b = 0; \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & 2a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

contiene al elemento nulo por lo tanto W es un subespacio de $V = M_{22}$

7) Determine si W es un subespacio de V .

$$V = P_2; W = \{a + bx + cx^2\} \text{ para } a + b + c = 0$$

$$W_1 = a_1 + b_1x + c_1x^2; \quad W_2 = a_2 + b_2x + c_2x^2$$

$$\begin{aligned} 1) \quad W_1 + W_2 &= (a_1 + b_1x + c_1x^2) + (a_2 + b_2x + c_2x^2) = \\ &= (a_1 + a_2) + x(b_1 + b_2) + x^2(c_1 + c_2) \end{aligned}$$

$$\text{para: } a_1 = 4, b_1 = -2, c_1 = -2; \quad a_2 = 6, b_2 = -3, c_2 = -3$$

respetando la condicion $a + b + c = 0$ se tiene:

$$\begin{aligned} &= (4 + 6) + x(-2 - 3) + x^2(-2 - 3) \\ &= 10 - 5x - 5x^2 \end{aligned}$$

dando valores de a, b y c , el resultado obtenido cumple con la condicion inicial de: $10 - 5 - 5 = 0$; por lo tanto cumple con la propiedad de la cerradura

$$2) \quad cW = c(a_1 + b_1x + c_1x^2) = ca_1 + cb_1x + cc_1x^2$$

$$\text{para: } a_1 = 4, b_1 = -2, c_1 = -2$$

$$= 4c - 2cx - 2cx^2$$

sigue cumpliendo con la condicion inicial, multiplicando por cualquier valor de c

$$3) \quad a_1 + b_1x + c_1x^2 \text{ con } a_1 = b_1 = c_1 = 0; \quad 0 + 0x + 0x^2 = 0$$

contiene al elemento nulo, por lo tanto W es un subespacio de $V = P_2$

8)

$$V = \mathbb{R}^2; W = \left\{ \begin{bmatrix} a-b \\ 2a+b \end{bmatrix} \right\}$$

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a_1-b_1 \\ 2a_1+b_1 \end{bmatrix} \right\}; W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a_2-b_2 \\ 2a_2+b_2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad W_1 + W_2 &= \left\{ \begin{bmatrix} a_1-b_1 \\ 2a_1+b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2-b_2 \\ 2a_2+b_2 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a_1-b_1+a_2-b_2 \\ 2a_1+b_1+2a_2+b_2 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} (a_1+a_2)-(b_1+b_2) \\ 2(a_1+a_2)+(b_1+b_2) \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$2) \quad cW = \left\{ c \begin{bmatrix} a_1-b_1 \\ 2a_1+b_1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} c(a_1-b_1) \\ c(2a_1+b_1) \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} ca_1-cb_1 \\ 2ca_1+cb_1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$3) \quad \text{con } a=b=0; \left\{ \begin{bmatrix} a_1-b_1 \\ 2a_1+b_1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

contiene al elemento nulo, por lo tanto W es un subespacio de $V = \mathbb{R}^2$

9)

$$V = R^4; W = \left\{ \begin{bmatrix} a-b \\ b-c \\ c-d \\ d-a \end{bmatrix} \right\}$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ b_1 - c_1 \\ c_1 - d_1 \\ d_1 - a_1 \end{bmatrix}; W_2 = \begin{bmatrix} a_2 - b_2 \\ b_2 - c_2 \\ c_2 - d_2 \\ d_2 - a_2 \end{bmatrix}$$

$$1) W_1 + W_2 = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ b_1 - c_1 \\ c_1 - d_1 \\ d_1 - a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 - b_2 \\ b_2 - c_2 \\ c_2 - d_2 \\ d_2 - a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 + a_2 - b_2 \\ b_1 - c_1 + b_2 - c_2 \\ c_1 - d_1 + c_2 - d_2 \\ d_1 - a_1 + d_2 - a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) \\ (b_1 + b_2) - (c_1 + c_2) \\ (c_1 + c_2) - (d_1 + d_2) \\ (d_1 + d_2) - (a_1 + a_2) \end{bmatrix}$$

$$2) cW = c \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ b_1 - c_1 \\ c_1 - d_1 \\ d_1 - a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(a_1 - b_1) \\ c(b_1 - c_1) \\ c(c_1 - d_1) \\ c(d_1 - a_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_1 - cb_1 \\ cb_1 - cc_1 \\ cc_1 - cd_1 \\ cd_1 - ca_1 \end{bmatrix}$$

$$3) \text{ con } a = b = c = d = 0; \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ b_1 - c_1 \\ c_1 - d_1 \\ d_1 - a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

contiene al elemento nulo, por lo tanto W es un subespacio de $V = R^4$

10)

$$V = P_2; W \{a + bx + cx^2\} \text{ para } abc = 0$$

$$W_1 = a_1 + b_1x + c_1x^2; \quad W_2 = a_2 + b_2x + c_2x^2$$

$$1) W_1 + W_2 = (a_1 + b_1x + c_1x^2) + (a_2 + b_2x + c_2x^2) = \\ = (a_1 + a_2) + x(b_1 + b_2) + x^2(c_1 + c_2)$$

$$\text{para: } a_1 = 0, b_1 = 4, c_1 = 3; \quad a_2 = 0, b_2 = 3, c_2 = 5 \\ = (0 + 0) + x(4 + 3) + x^2(3 + 5) \\ = 0 + 7x + 8x^2$$

dando valores de a, b y c, el resultado obtenido cumple con la condicion inicial de : (0)(7)(8) = 0; por lo tanto cumple con la propiedad de la cerradura con $a_1 = a_2 = 0$

$$\text{para: } a_1 = 3, b_1 = 0, c_1 = 3; \quad a_2 = 4, b_2 = 0, c_2 = 5 \\ = (3 + 4) + x(0 + 0) + x^2(3 + 5) \\ = 7 + 0 + 8x^2$$

dando valores de a, b y c, el resultado obtenido cumple con la condicion inicial de : (7)(0)(8) = 0; por lo tanto cumple con la propiedad de la cerradura con $b_1 = b_2 = 0$

NOTA: con $x^2(c_1 + c_2)$ no se puede dar valor de $c_1 = c_2 = 0$ por que ya no seria un polinomio de grado 2.

$$2) cW = c(a_1 + b_1x + c_1x^2) = ca_1 + cb_1x + cc_1x^2$$

$$\text{para: } a_1 = 0, b_1 = 4, c_1 = 3 \quad \text{y con: } a_1 = 4, b_1 = 0, c_1 = 3 \\ = 0c + 4cx + 3cx^2 \quad = 4c + 0cx + 3cx^2$$

sigue cumpliendo con la condicion inicial , multiplicando por cualquier valor de $a_1 = b_1 = 0$

$$3) a_1 + b_1x + c_1x^2 \text{ con } a_1 = b_1 = c_1 = 0; 0 + 0x + 0x^2 = 0$$

contiene al elemento nulo, por lo tanto W es un subespacio de $V = P_2$

4.2 EJERCICIOS. Determine en los siguientes ejercicios si W es un subespacio de V .

$$1) V = \mathbb{R}^2; W = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Re spuesta : W si es un subespacio de $V = \mathbb{R}^2$

$$2) V = \mathbb{R}^3; W = \left\{ \begin{bmatrix} a-c \\ b+c \\ 5c \end{bmatrix} \right\}$$

$$3) V = \mathbb{R}^3; W = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ -2a \end{bmatrix} \right\}$$

Re spuesta : W si es un subespacio de $V = \mathbb{R}^3$

$$4) V = \mathbb{R}^2; W = \left\{ \begin{bmatrix} a+1 \\ a \end{bmatrix} \right\}$$

$$5) V = M_{22}; W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right\} \\ \text{para } ad \geq bc$$

Re spuesta : W no es un subespacio de $V = M_{22}$

6) El conjunto de todos los vectores $\mathbb{R}^3$ cuyo primero y último componente son cero.

7) El conjunto de todos los vectores $\mathbb{R}^4$ cuyos primeros tres componentes son cero.

Re spuesta : W si es un subespacio de $V = \mathbb{R}^4$

$$8) V = M_{22}; W = \left\{ \begin{bmatrix} a & 1+a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

9) El conjunto de todos los polinomios de grado 3; $V = P_3; W$

Re spuesta : W no es un subespacio de $V = P_3$

10) El conjunto de las matrices diagonales de $n \times n$; $V = M_{nn}; W$

4.3 INDEPENDENCIA LINEAL

Definición. Un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ de un espacio vectorial V es linealmente dependiente si existen escalares $c_1, c_2, \dots, c_k$, al menos uno de los cuales no sea 0, tal que:

$$c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

Un conjunto de vectores no linealmente dependiente se dice que es linealmente independiente (linealmente dependiente: al menos uno de los vectores es combinación lineal de los otros).

4.3 EJEMPLOS. Determine si los siguientes conjuntos son linealmente independientes o dependientes.

1)

sea $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es linealmente dependiente ya que existen escalares c_1, c_2, c_3

de tal forma que:

$$c_1(1+x+x^2) + c_2(1-x+3x^2) + c_3(1+3x-x^2) = 0$$

$$= \{1+x+x^2, 1-x+3x^2, 1+3x-x^2\}$$

tales escalares, por inspección:

$$= (1+x+x^2) - (1-x+3x^2) - (1+3x-x^2) = 0$$

como el resultado es igual a 0 el conjunto es linealmente dependiente

2)

Determine si $\{1+x, x+x^2, 1+x^2\}$ es linealmente independiente

$$\text{entonces: } c_1(1+x) + c_2(x+x^2) + c_3(1+x^2) = 0$$

$$\text{agrupando: } (c_1 + c_3) + (c_1 + c_2)x + (c_2 + c_3)x^2 = 0$$

Esto implica:

$$c_1 + c_3 = 0$$

$$c_1 + c_2 = 0 \quad \text{esto implica: } c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

$$c_2 + c_3 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(1-0) + 1(1-0) = 2$$

como el determinante es diferente de 0, el conjunto es linealmente independiente

3)

Determinar si $\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \right\}$ es linealmente independiente

$$c_1 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rrcr} -c_1 & +3c_2 & & -c_4 = a \\ c_1 & & +2c_3 & = b \\ -2c_1 & +c_2 & -3c_3 & -c_4 = c \\ 2c_1 & +c_2 & +c_3 & +7c_4 = d \end{array} \quad \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$= -1 \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= -1(-16) - 3(4) + 0(8) + 1(-4) = 16 - 12 - 4 = 0$$

como el determinante es igual a 0, el conjunto es linealmente dependiente

4)

$\{x, 1+x\}$ en $V = P_1$

En forma general :

$$a + bx = c$$

En forma matricial :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = (0-1) = -1$$

como el determinante es diferente de 0, el conjunto es linealmente independiente

5)

$$\begin{aligned} & \{1+x, 1+x^2, 1-x+x^2\} \text{ en } V = P_2 \\ & c_1(1+x) + c_2(1+x^2) + c_3(1-x+x^2) \\ & = c_1 + c_1x + c_2 + c_2x^2 + c_3 - c_3x + c_3x^2 \\ & = (c_1 + c_2 + c_3)1 + (c_1 - c_3)x + (c_2 + c_3)x^2 = a + bx + cx^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= a \\ c_1 - c_3 &= b \\ c_1 + c_2 + c_3 &= c \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$= 1 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1(0 - (-1)) - 1(1 - 0) + 1(1 - 0) =$$

$$= 1 - 1 + 1 = 1$$

como el determinante es diferente de 0, el conjunto es linealmente independiente

4.3 EJERCICIOS. Determine si los siguientes conjuntos es linealmente independiente o dependiente.

1) Determine si $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \right\}$ es linealmente independiente en M_{22}

Respuesta: es linealmente independiente

2) Determine si $\left\{ \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \right\}$ es linealmente independiente en M_{22}

3) Determine si $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$ es linealmente independiente en R^3

Respuesta: es linealmente dependiente

4) $\{2x, x-x^2, 1+x^3, 2-x^2+x^3\}$ en $V = P_3$

5) $\{x, 2x-x^2, 3x+2x^2\}$ en $V = P_2$

Respuesta: es linealmente dependiente

4.4 BASES VECTORIALES.

Definición. Un subconjunto β de un espacio vectorial V es una base para V si:

- 1.- β genera a V
- 2.- β es linealmente independiente.

4.4 EJEMPLOS. Determine si los siguientes conjuntos constituyen una base.

1)

Demuestre que $\beta = \{1+x, x+x^2, 1+x^2\}$ es una base para $V = P_2$

$$c_1(1+x) + c_2(x+x^2) + c_3(1+x^2) = a + bx + cx^2$$

$$(c_1 + c_3) + (c_1 + c_2)x + (c_2 + c_3)x^2 = a + bx + cx^2$$

Igualando potencias en ambos lados :

$$c_1 + c_3 = a$$

$$c_1 + c_2 = b$$

$$c_2 + c_3 = c$$

$$\text{de donde : } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(1-0) + 1(1-0) = 2$$

como el determinante es diferente de 0, el conjunto es linealmente independiente, por lo tanto β es una base para $V = P_2$

2)

Demuestre que $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$ es una base para $V = M_{22}$

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} c_1 & + c_3 & + c_4 = a \\ & - c_2 & + c_3 & + c_4 = b \\ & + c_2 & + c_3 & + c_4 = c \\ c_1 & & + c_3 & - c_4 = d \end{array} \quad \begin{array}{c} + \quad - \quad + \quad - \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= 1 \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} - 0 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1(4) - 0(0) + 1(-2) - 1(-2) = 4 - 2 + 2 = 4$$

como el $\det$ er min ante es diferente de 0, el conjunto es linealmente independiente
por lo tanto β es una base para $V = M_{22}$

3)

Demuestre que $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ es una base para $V = M_{22}$

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} c_1 & + c_3 & + c_4 = a \\ & c_2 & + c_3 = b \\ & + c_2 & + c_4 = c \\ c_1 & + c_3 & + c_4 = d \end{array} \quad \begin{array}{c} + \quad - \quad + \quad - \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= 1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - 0 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1(-2) - 0(1) + 1(1) - 1(-1) = -2 + 1 + 1 = 0$$

como el $\det$ er min ante es igual a 0, el conjunto es linealmente dependiente
por lo tanto β no es una base para $V = M_{22}$

4)

Demuestre que $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \right\}$ es una base para $V = M_{22}$

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccccc} c_1 & +3c_2 & +5c_3 & +7c_4 & = & a & \\ 2c_1 & +4c_2 & +6c_3 & +8c_4 & = & b & \\ c_1 & +3c_2 & +5c_3 & +7c_4 & = & c & \\ 2c_1 & +4c_2 & +6c_3 & +8c_4 & = & d & \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$= 1 \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} - 7 \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= 1(0) - 3(0) + 5(0) - 7(0) = 0$$

como el $\det$ er min ante es igual a 0, el conjunto es linealmente dependiente
por lo tanto β no es una base para $V = M_{22}$

5)

Demuestre que $\beta = \{1-x, 1-x^2, x-x^2\}$ es una base para $V = P_2$

$$c_1(1-x) + c_2(1-x^2) + c_3(x-x^2) = a + bx + cx^2$$

$$c_1 - c_1x + c_2 - c_2x^2 + c_3x - c_3x^2 = a + bx + cx^2$$

$$(c_1 + c_2) + (-c_1 + c_3)x + (-c_2 - c_3)x^2 = a + bx + cx^2$$

Igualando potencias en ambos lados :

$$c_1 + c_2 = a$$

$$-c_1 + c_3 = b$$

$$-c_2 - c_3 = c$$

$$\text{ò} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = 1(0+1) - 1(1-0) + 0(1-0)$$

$$= 1 - 1 + 0 = 0$$

como el $\det$ er min ante es igual a 0, el conjunto es linealmente dependiente
por lo tanto β no es una base para $V = P_2$

4.4 EJERCICIOS. Determine si los siguientes conjuntos constituyen una base.

1) Demuestre que $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ es una base para $V = M_{22}$

Re spuesta : el conjunto no consituye una base

2) Demuestre que $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$ es una base para $V = M_{22}$

3) Demuestre que $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ es una base para $V = M_{22}$

Re spuesta : el conjunto no consituye una base

4) Demuestre que $\beta = \{1, 1 + 2x + 3x^2\}$ es una base para $V = P_2$

5) Demuestre que $\beta = \{1, 2 - x, 3 - x^2, x + 2x^2\}$ es una base para $V = P_2$

Re spuesta : el conjunto no consituye una base

4.4.1 CAMBIO DE BASE.

En $V = R^2$ se expresan vectores en término de la base $(\hat{i}, \hat{j}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Así como también, para $V = R^3$ se expresan vectores en términos de la base $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Pero en ocasiones se puede trabajar en alguna otra base y para lo cual existe un número infinito de bases para escoger, ya que en un espacio vectorial de dimensión n cualesquiera n vectores linealmente independientes forman una base.

Para el caso de $V = R^2$, sean $\hat{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\hat{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Entonces $\beta_1 = \{\hat{u}_1, \hat{u}_2\}$ es una base canónica en R^2 . Sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Como $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son linealmente independientes (por que $\vec{v}_1$ no es múltiplo de $\vec{v}_2$), entonces $\beta_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es una segunda base en R^2 . Sea $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ un vector en R^2 . Esta notación significa que:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 \hat{u}_1 + x_2 \hat{u}_2$$

Es decir $\vec{x}$ está expresado en términos de los vectores de la base β_1 . Es decir:

$$\vec{x}_{\beta_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Como β_2 es otra base en R^2 , existen escalares c_1 y c_2 tales que:

$$\vec{x} = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2$$

Encontrando a c_1 y c_2 , se tiene: $\begin{pmatrix} \vec{x} \\ x \end{pmatrix}_{\beta_2} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

Lo que significa que $\vec{x}$ está expresado en términos de los vectores en β_2 .

Para encontrar c_1 y c_2 se escribe la base anterior $(\hat{u}_1, \hat{u}_2)$ en términos de la nueva base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$. Es decir:

$$\hat{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{-----}(A)$$

$$\hat{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{-----}(B)$$

Entonces:

$$\text{De (A): } 1 = c_1 - c_2$$

$$0 = 3c_1 + 2c_2 \quad \text{Resolviendo;}$$

$$-3 = -3c_1 + 3c_2$$

$$0 = 3c_1 + 2c_2$$

$$\text{-----}$$

$$-3 = 0 + 5c_2$$

$$-3 = 5c_2 \rightarrow c_2 = -\frac{3}{5} \quad \therefore \hat{u}_1 = \frac{2}{5}\vec{v}_1 - \frac{3}{5}\vec{v}_2$$

$$c_1 = 1 + c_2 = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\text{De (B): } 0 = c_1 - c_2$$

$$1 = 3c_1 + 2c_2 \quad \text{Resolviendo;}$$

$$0 = -3c_1 + 3c_2$$

$$1 = 3c_1 + 2c_2$$

$$\text{-----}$$

$$1 = 0 + 5c_2$$

$$1 = 5c_2 \rightarrow c_2 = \frac{1}{5} \quad \therefore \hat{u}_2 = \frac{1}{5}\vec{v}_1 + \frac{1}{5}\vec{v}_2$$

$$c_1 = c_2 = \frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned} \text{Entonces : } \vec{x} &= x_1 \hat{u}_1 + x_2 \hat{u}_2 = x_1 \left(\frac{2}{5}\vec{v}_1 - \frac{3}{5}\vec{v}_2 \right) + x_2 \left(\frac{1}{5}\vec{v}_1 + \frac{1}{5}\vec{v}_2 \right) \\ &= \left(\frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 \right) \vec{v}_1 + \left(-\frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 \right) \vec{v}_2 \end{aligned}$$

$$\text{Entonces : } c_1 = \frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2$$

$$c_2 = -\frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2$$

o tambien :

$$\vec{x}_{\beta_2} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 \\ -\frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo si $\vec{x}_{\beta_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, entonces :

$$\vec{x}_{\beta_2} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{5}{5} \\ -\frac{13}{5} \end{pmatrix}$$

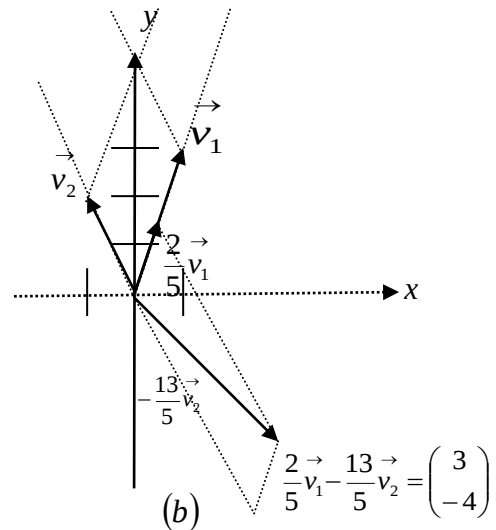
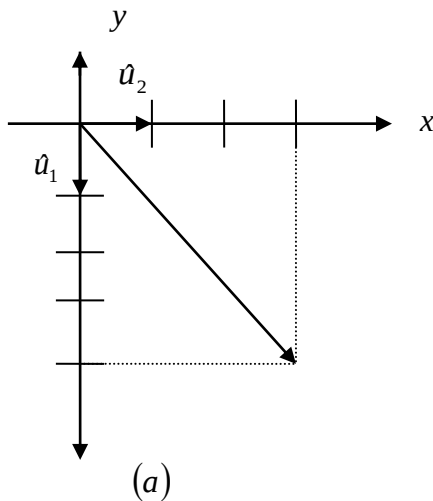


FIGURA (a) Expresión de $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ en términos de $\beta_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

FIGURA (b) Expresión de $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ en términos de $\beta_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

A la matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ se le llama matriz de transición de β_1 a β_2 .

En general, el procedimiento para encontrar la matriz de transición de una base β_1 a la base β_2

1) Se escribe la matriz $P_{\beta_1 \leftarrow \beta_2}$ cuyas columnas son $\overline{V_1}, \overline{V_2}, \dots, \overline{V_n}$

2) Se calcula $P_{\beta_2 \leftarrow \beta_1} = (P_{\beta_1 \leftarrow \beta_2})^{-1}$. Esta es la matriz de transición que se busca.

4.4.1 EJEMPLOS.

1) Sea $P(x) = 1 + 2x - x^2$ con $\beta_1 = \{1, x, x^2\}$. Encuentre el vector coordenada de $P(x)$ con respecto a $\beta_2 = \{1+x, x+x^2, 1+x^2\}$

Los vectores coordenados de $P(x)$ en términos de β_2 son:

$$(1+x)_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (x+x^2)_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (1+x^2)_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces, la matriz de transición de β_1 a β_2 se obtiene a partir de:

$$P_{\beta_1 \leftarrow \beta_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para determinar $P_{\beta_2 \leftarrow \beta_1}$ es mucho más fácil utilizar el hecho de que:

$$\begin{aligned} P_{\beta_2 \leftarrow \beta_1} &= (P_{\beta_1 \leftarrow \beta_2})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{-R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} \frac{1}{2}R_3 \\ R_3+R_2 \\ -R_3+R_1 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right] \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Entonces:

$$P(x)_{\beta_2} = (P_{\beta_1 \leftarrow \beta_2})^{-1} \vec{x}_{\beta_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Finalmente: $P(x)_{\beta_2} = 2 - x^2$

2) Sea $\vec{x}_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\beta_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; $\beta_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Calcular $\vec{x}_{\beta_2}$

Los vectores coordenados de $\vec{x}_{\beta_1}$ términos de β_2 se obtienen de las siguientes combinaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_7 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_8 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_9 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Este procedimiento dará a resolver 3 sistemas linealmente independientes para encontrar a $\vec{x}_{\beta_2}$. Pero es mucho más fácil utilizar el hecho de que.

$$P_{\beta_2 \leftarrow \beta_1} = (P_{\beta_1 \leftarrow \beta_2})^{-1}$$

Los vectores coordenados de β_1 en términos de β_2 son:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\beta_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\beta_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\beta_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces: $P_{\beta_1 \leftarrow \beta_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Para determinar $P_{\beta_1 \leftarrow \beta_2}$ es mucho más fácil utilizar el hecho de que:

$$\begin{aligned}
P_{\beta_2 \leftarrow \beta_1} &= (P_{\beta_1 \leftarrow \beta_2})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-R_1+R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
&\xrightarrow[\begin{smallmatrix} R_2+R_3 \\ -R_2+R_1 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} R_2+R_3 \\ -R_2+R_1 \end{smallmatrix}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-R_3+R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\vec{x}_{\beta_2} = (P_{\beta_1 \leftarrow \beta_2})^{-1} \vec{x}_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-1+0 \\ 3+0-5 \\ -3+1+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

3) Sea $P_{\beta_1}(x) = 4 - 2x - x^2$ con $\beta_1 = \{1, x, x^2\}$. Encuentre el vector coordenada de $P(x)$ con respecto a $\beta_2 = \{1 + x + x^2, x + x^2, x^2\}$.

Los vectores coordenados de $P(x)$ en términos de β_2 son:

$$(1 + x + x^2)_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (x + x^2)_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (x^2)_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces, la matriz de transición de β_1 a β_2 se obtiene a partir de:

$$P_{\beta_1 \leftarrow \beta_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para determinar $P_{\beta_1 \leftarrow \beta_2}$ es mucho más fácil utilizar el hecho de que:

$$\begin{aligned} P_{\beta_2 \leftarrow \beta_1} &= (P_{\beta_1 \leftarrow \beta_2})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-R_1+R_2 \\ -R_1+R_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{-R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Entonces:

$$P(x)_{\beta_2} = (P_{\beta_1 \leftarrow \beta_2})^{-1} \vec{x}_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+0+0 \\ -4-2+0 \\ 0+2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente: $P(x)_{\beta_2} = 4 - 6x + x^2$

4) Sea $\vec{x}_{\beta_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\beta_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; $\beta_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Calcular $\vec{x}_{\beta_2}$

$$P_{\beta_2 \leftarrow \beta_1} = (P_{\beta_1 \leftarrow \beta_2})^{-1}$$

Los vectores coordenadas de β_1 en términos de β_2 son:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\beta_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\beta_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\beta_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces: $P_{\beta_1 \leftarrow \beta_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Para determinar $P_{\beta_1 \leftarrow \beta_2}$ es mucho más fácil utilizar el hecho de que:

$$\begin{aligned} P_{\beta_2 \leftarrow \beta_1} &= (P_{\beta_1 \leftarrow \beta_2})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-R_1+R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{\begin{matrix} R_2+R_1 \\ -2R_2+R_3 \end{matrix}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\vec{x}_{\beta_2} = (P_{\beta_1 \leftarrow \beta_2})^{-1} \vec{x}_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+4+0 \\ 0+4+0 \\ 1-8+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}$$

5) Sea $\vec{x}_{\beta_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\beta_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$; $\beta_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Calcular $\vec{x}_{\beta_2}$

Partiendo de $\vec{x} = \begin{bmatrix} -\vec{u}_1 + 4\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3 \end{bmatrix}_{\beta_2} = -\begin{bmatrix} \vec{u}_1 \end{bmatrix}_{\beta_2} + 4\begin{bmatrix} \vec{u}_2 \end{bmatrix}_{\beta_2} + 2\begin{bmatrix} \vec{u}_3 \end{bmatrix}_{\beta_2}$

Ordenando:

$$\vec{x}_{\beta_2} = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 \end{bmatrix}_{\beta_2} \begin{bmatrix} \vec{u}_2 \end{bmatrix}_{\beta_2} \begin{bmatrix} \vec{u}_3 \end{bmatrix}_{\beta_2} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Donde: $P_{\beta_2 \leftarrow \beta_1} = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 \end{bmatrix}_{\beta_2} \begin{bmatrix} \vec{u}_2 \end{bmatrix}_{\beta_2} \begin{bmatrix} \vec{u}_3 \end{bmatrix}_{\beta_2}$

Por lo tanto:

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$1 = c_1 + c_3 \quad c_1 = 5$$

$$3 = c_2 \quad \text{de donde} \quad c_2 = 3$$

$$2 = c_1 - c_2 \quad c_3 = -4$$

Entonces: $\vec{u}_1 = 5\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 - 4\vec{v}_3$

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$4 = c_1 + c_3 \quad c_1 = 3$$

$$2 = c_2 \quad \text{de donde} \quad c_2 = 2$$

$$1 = c_1 - c_2 \quad c_3 = 1$$

Entonces: $\vec{u}_2 = 3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3$

$$\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$0 = c_1 + c_3 \quad c_1 = 1$$

$$-1 = c_2 \quad \text{de donde} \quad c_2 = -1$$

$$2 = c_1 - c_2 \quad c_3 = -1$$

Entonces: $\vec{u}_3 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 - \vec{v}_3$

Ordenando:

$$P_{\beta_2 \leftarrow \beta_1} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Finalmente:

$$\vec{x}_{\beta_2} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5+12+2 \\ -3+8-2 \\ 4+4-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

6) Encuentre el vector coordenados de x con respecto a la base β_2 .

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{\beta_1} \quad \text{donde: } \beta_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \beta_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ en } R^2$$

Entonces, la matriz de transición de β_1 a β_2 se obtiene a partir de:

$$P_{\beta_1 \leftarrow \beta_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Para determinar $P_{\beta_1 \leftarrow \beta_2}$ es mucho más fácil utilizar el hecho de que:

$$\begin{aligned} P_{\beta_2 \leftarrow \beta_1} &= (P_{\beta_1 \leftarrow \beta_2})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 0 \\ 1 & -1 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & -2 & | & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{\begin{matrix} -\frac{1}{2}R_2+R_1 \\ -R_2+R_1 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\vec{x}_{\beta_2} = (P_{\beta_1 \leftarrow \beta_2})^{-1} \vec{x}_{\beta_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\frac{3}{2} \\ 1-\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

7) Sea $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\beta_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; $\beta_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ en R^3

Calcular $\vec{x}_{\beta_2}$

$$P_{\beta_2 \leftarrow \beta_1} = (P_{\beta_1 \leftarrow \beta_2})^{-1}$$

Los vectores coordenados de β_1 en términos de β_2 son:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\beta_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\beta_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\beta_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces: $P_{\beta_1 \leftarrow \beta_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Para determinar $P_{\beta_1 \leftarrow \beta_2}$ es mucho más fácil utilizar el hecho de que:

$$\begin{aligned} P_{\beta_2 \leftarrow \beta_1} &= (P_{\beta_1 \leftarrow \beta_2})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-R_1+R_3 \\ -R_1+R_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{-R_2+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\vec{x}_{\beta_2} = (P_{\beta_1 \leftarrow \beta_2})^{-1} \vec{x}_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0+0 \\ -1+0+0 \\ 0+0-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

8) Sea $P_{\beta_1}(x) = 2 - x$ con $\beta_1 = \{1, x\}$. Encuentre el vector coordenado de $P(x)$ con respecto a $\beta_2 = \{x, 1+x\}$.

Los vectores coordenadas de $P(x)$ en términos de β_2 son:

$$(x)_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1+x)_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces, la matriz de transición de β_1 a β_2 se obtiene a partir de:

$$P_{\beta_1 \leftarrow \beta_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para determinar $P_{\beta_1 \leftarrow \beta_2}$ es mucho más fácil utilizar el hecho de que:

$$\begin{aligned} P_{\beta_2 \leftarrow \beta_1} &= (P_{\beta_1 \leftarrow \beta_2})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 1 & -1 \\ 0 & 1 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Entonces:

$$P(x)_{\beta_2} = (P_{\beta_1 \leftarrow \beta_2})^{-1} \vec{x}_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Finalmente: $P(x)_{\beta_2} = 3 - x$

4.4.1 EJERCICIOS. Encuentre la matriz de cambio de base $P_{\beta_1 \leftarrow \beta_2}$ de los siguientes ejercicios.

1) Sea $\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\beta_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; $\beta_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ en R^2

Calcular $\vec{x}_{\beta_2}$

Respuesta: $\begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

2) Sea $\vec{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\beta_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; $\beta_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ en R^2

Calcular $\vec{x}_{\beta_2}$

3) Sea $\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\beta_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; $\beta_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ en R^3

Calcular $\vec{x}_{\beta_2}$

Respuesta: $\begin{bmatrix} \frac{86}{33} \\ -\frac{20}{11} \\ \frac{7}{11} \end{bmatrix}$

4) Sea $\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\beta_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$; $\beta_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ en R^3

Calcular $\vec{x}_{\beta_2}$

5) Sea $P_{\beta_1}(x) = 1 + x^2$ con $\beta_1 = \{1, x, x^2\}$. Encuentre el vector coordenado de $P(x)$ con respecto a $\beta_2 = \{1 + x + x^2, x + x^2, x^2\}$.

Respuesta: $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 - x + x^2$

6) Sea $P_{\beta_1}(x) = 1 + 3x$ con $\beta_1 = \{1 + x, 1 - x\}$. Encuentre el vector coordenado de $P(x)$ con respecto a $\beta_2 = \{2x, 4\}$.

7) Sea $P_{\beta_1}(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 6$ con $\beta_1 = \{1, x, x^2, x^3\}$. Encuentre el vector coordenado de $P(x)$ con respecto a $\beta_2 = \{1, 1-x, (1-x)^2, (1-x)^3\}$.

Respuesta: $2(x^3 + x^2) - 5(x^2 + x) + 10(x + 1) - 16$

8) Sea $P_{\beta_1}(x) = 2 + x + 3x^2$ con $\beta_1 = \{1-x, 3x, x^2-x-1\}$. Encuentre el vector coordenado de $P(x)$ con respecto a $\beta_2 = \{3-2x, 1+x, x+x^2\}$.

5. TRANSFORMACIONES

5.1 TRANSFORMACIONES LINEALES.

Las matrices pueden ser utilizadas para transformar vectores cuando actúan en funciones de la forma $\vec{w} = T\left(\vec{v}\right)$.

Una función es una transformación lineal de los números reales que transforman números reales en números reales, por ejemplo: $f(x) = x^2$.

En el caso de matrices, éstas pueden transformar un vector en R^2 a R^3 , por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad y \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Entonces:
$$\vec{w} = A\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+15 \\ -2+0 \\ 8+15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ -2 \\ 23 \end{bmatrix}$$

Esto demuestra que A transforma a $\vec{v}$ en $\vec{w}$.

De manera más general:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+3y \\ -x+0 \\ 4x+3y \end{bmatrix}$$

La matriz A transforma un vector arbitrario $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ de R^2 en un vector $\begin{bmatrix} x+3y \\ -x+0 \\ 4x+3y \end{bmatrix}$

de R^3 .

Tal transformación se escribe como:

$$T_A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+3y \\ -x \\ 4x+3y \end{bmatrix}$$

Una transformación (o mapeo o función) T de R^n a R^m es una regla que asigna a cada vector $\vec{v}$ de R^n un vector único $T\left(\vec{v}\right)$ de R^m . El dominio de T

es R^n , mientras que el contradominio de T es R^m . Escribiéndose de la siguiente forma $T:R^n \rightarrow R^m$. En el ejemplo anterior, el dominio de T_A es R^2 y su contradominio es R^3 .

Definición. Una transformación $T : R^n \rightarrow R^m$ se denomina transformación lineal si:

1. $T\left(\vec{u} + \vec{v}\right) = T\left(\vec{u}\right) + T\left(\vec{v}\right)$ para todo $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en R^n
2. $T\left(c \vec{v}\right) = cT\left(\vec{v}\right)$ para todo $\vec{v}$ en R^n y todo escalar c

La definición de transformación puede ser racionalizada mediante la combinación de las dos propiedades anteriores, de la siguiente manera:

$T : R^n \rightarrow R^m$ es transformación lineal si $T\left(c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2\right) = c_1 T\left(\vec{v}_1\right) + c_2 T\left(\vec{v}_2\right)$ para todo $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ en R^n y escalares c_1 y c_2 .

En el caso de las transformaciones matriciales, todas son lineales.

Definición. Sea A una matriz de $n \times m$. Entonces la transformación matricial $T_A : R^n \rightarrow R^m$ definida por $T_A\left(\vec{x}\right) = A\vec{x}$ (para $\vec{x}$ en R^n) es una transformación lineal.

5.1 EJEMPLOS.

1) Suponer que T es una transformación lineal de R^2 en P_2 tal que:

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 - 3x + x^2 \quad y \quad T\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 - x^2$$

$$\text{Encuentre } T\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad y \quad T\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Ya que $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ es una base para R^2 (son linealmente independientes)

por lo tanto:

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} c_1 + 2c_2 = -1 \\ c_1 + 3c_2 = 2 \end{array} \quad \text{Resolviendo} \quad \begin{array}{l} c_1 = -7 \\ c_2 = 3 \end{array}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} T\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} &= T\left[-7\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right] = -7T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3T\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= -7(2 - 3x + x^2) + 3(1 - x^2) \\ &= -11 + 21x - 10x^2 \end{aligned}$$

De manera similar:

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} c_1 + 2c_2 = a \\ c_1 + 3c_2 = b \end{array} \quad \text{Resolviendo} \quad \begin{array}{l} c_1 = 3a - 2b \\ c_2 = b - a \end{array}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} T\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &= T\left[(3a - 2b)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (b - a)\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right] = (3a - 2b)T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (b - a)T\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= (3a - 2b)(2 - 3x + x^2) + (b - a)(1 - x^2) \\ T\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &= (5a - 3b) + (-9a + 6b)x + (4a - 3b)x^2 \end{aligned}$$

Cuando $a = -1$ y $b = 2$ se tiene:

$$T\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = -11 + 21x - 10x^2$$

2) Sea $T : P_2 \rightarrow P_2$ una transformación lineal para la cual:

$$T[1] = 3 - 2x \quad T[x] = 4x - x^2 \quad T[x^2] = 2 + 2x^2$$

Encuentre: $T[6 + x - 4x^2] \quad T[a + bx + cx^2]$

Ya que $\beta = \{1, x, x^2\}$ es una base para P_2 (son linealmente independientes), por lo tanto:

$$c_1(1) + c_2(x) + c_3(x^2) = 6 + x - 4x^2$$

Igualando coeficientes en potencias de "x":

$$c_1 = 6 \quad ; \quad c_2 = 1 \quad ; \quad c_3 = -4$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} T[6 + x - 4x^2] &= T[6[1] + 1[x] - 4[x^2]] \\ &= 6T[1] + T[x] - 4T[x^2] \\ &= 6(3 - 2x) + (4x - x^2) - 4(2 + 2x^2) \end{aligned}$$

$$T[6 + x - 4x^2] = 18 - 12x + 4x - x^2 - 8 - 8x^2 = 10 - 8x - 9x^2$$

De manera similar:

$$c_1(1) + c_2(x) + c_3(x^2) = a + bx + cx^2$$

Igualando coeficientes en potencias de "x"

$$c_1 = a \quad ; \quad c_2 = b \quad ; \quad c_3 = c$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} T[a + bx + cx^2] &= T[a[1] + b[x] + c[x^2]] \\ &= aT[1] + bT[x] + cT[x^2] \\ &= a(3 - 2x) + b(4x - x^2) + c(2 + 2x^2) \\ &= 3a - 2ax + 4bx - bx^2 + 2c + 2cx^2 \end{aligned}$$

$$T[a + bx + cx^2] = (3a + 2c) + (-2a + 4b)x + (-b + 2c)x^2$$

Cuando $a = 6 \quad ; \quad b = 1 \quad ; \quad c = -4$

$$T[6 + x - 4x^2] = 10 - 8x - 9x^2$$

3) Sea $T : R^3 \rightarrow R^2$ una transformación lineal para la cual:

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Calcule $T \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Dado que: $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ constituyen una base (linealmente independientes), entonces:

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Resolviendo:

$$c_1 = 3 \quad c_2 = -4 \quad c_3 = 5$$

Entonces:

$$T \left[3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = T \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$3T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 4T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 \\ -15 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+4+25 \\ 9-16-15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ -22 \end{pmatrix}$$

4) Sea $T : M_{22} \rightarrow R$ una transformación lineal para lo cual:

$$T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 4 \quad T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -1 \quad T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 \quad T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

Encuentre: $T \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Dado que:

$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ Constituyan una base (linealmente independientes), entonces:

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Entonces:

Resolviendo:

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 4$$

$$c_4 = 2$$

$$c_2 + c_3 + c_4 = 7$$

$$c_3 = -1 - c_4 = -1 - 2 = -3$$

$$c_3 + c_4 = -1$$

$$c_2 = 7 - c_3 - c_4 = 7 - (-3) - 2 = 7 + 3 - 2 = 8$$

$$c_4 = 2$$

$$c_1 = 4 - c_2 - c_3 - c_4 = 4 - 8 - (-3) - 2 = 4 - 8 + 3 - 2 = -3$$

Por lo tanto:

$$T \left\{ -3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 8 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} = T \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$-3T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 8T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 3T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 2T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$-3(4) + 8(-1) - 3(2) + 2(3) = T \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$T \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = -12 - 8 - 6 + 6 = -20$$

5) Sea $T : P_2 \rightarrow P_2$ una transformación lineal para la cual

$$T[1] = 1 + x^2 \quad T[x] = x - x^2 \quad T[x^2] = 1 + x + x^2$$

Encuentre: $T[4 - x + 3x^2]$

Ya que $\beta = \{1, x, x^2\}$ es una base para P_2 (son linealmente independientes) por lo tanto:

$$c_1(1) + c_2(x) + c_3(x^2) = 4 - x + 3x^2$$

Igualando coeficientes en potencias de "x":

$$c_1 = 4 \quad ; \quad c_2 = -1 \quad ; \quad c_3 = 3$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} T[4 - x + 3x^2] &= T[4[1] - 1[x] + 3[x^2]] \\ &= 4T[1] - T[x] + 3T[x^2] \\ &= 4(1 + x^2) - (x - x^2) + 3(1 + x + x^2) \end{aligned}$$

$$T[4 - x + 3x^2] = 4 + 4x^2 - x + x^2 + 3 + 3x + 3x^2 = 7 + 2x + 8x^2$$

$$T[4 - x + 3x^2] = 7 + 2x + 8x^2$$

6) Sea $T : M_{22} \rightarrow R$ una transformación lineal para lo cual:

$$T\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \quad T\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 \quad T\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 3 \quad T\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 4$$

Encuentre: $T\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

Dado que:

$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ Constituyen una base (son linealmente independientes), entonces:

$$c_1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_4\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Resolviendo:

$$\begin{array}{ll}
 c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 1 & c_4 = 2 \\
 c_2 + c_3 + c_4 = 3 & c_3 = 4 - c_4 = 4 - 2 = 2 \\
 c_3 + c_4 = 4 & c_2 = 3 - c_3 - c_4 = 3 - 2 - 2 = -1 \\
 c_4 = 2 & c_1 = 1 - c_2 - c_3 - c_4 = 1 - (-1) - 2 - 2 = 1 + 1 - 2 - 2 = -2
 \end{array}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 T\left\{-2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\} &= T\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \\
 -2T\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 1T\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2T\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 2T\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} &= T\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \\
 -2(1) - 1(2) + 2(3) + 2(4) &= T\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \\
 T\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} &= -2 - 2 + 6 + 8 = 10
 \end{aligned}$$

7) sea $T : R^2 \rightarrow P_2$ una transformación lineal para la cual

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 - 2x \quad y \quad T\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = x + 2x^2$$

Encuentre $T\begin{bmatrix} -7 \\ 9 \end{bmatrix}$

Ya que $\beta = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ es una base para R^2 (son linealmente independientes)

por lo tanto:

$$c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} c_1 + 3c_2 = -7 \\ c_1 - c_2 = 9 \end{array} \quad \text{Resolviendo} \quad \begin{array}{l} c_1 = 5 \\ c_2 = -4 \end{array}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 T\begin{bmatrix} -7 \\ 9 \end{bmatrix} &= T\left[5\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}\right] = 5T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 4T\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \\
 &= 5(1 - 2x) - 4(x + 2x^2) \\
 &= 5 - 10x - 4x - 8x^2 \\
 T\begin{bmatrix} -7 \\ 9 \end{bmatrix} &= 5 - 14x - 8x^2
 \end{aligned}$$

8) Sea $T : R^2 \rightarrow R^2$ una transformación lineal tal que:

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix} \quad y \quad T \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Encuentre $T \begin{bmatrix} 10 \\ -15 \end{bmatrix}$ y $T \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix}$

Ya que $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ es una base para R^2 (son linealmente independientes)

por lo tanto:

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -15 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} c_1 + 2c_2 = 10 \\ -c_1 + 2c_2 = -15 \end{cases} \quad \text{Resolviendo} \quad \begin{cases} c_1 = \frac{25}{2} \\ c_2 = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} T \begin{bmatrix} 10 \\ -15 \end{bmatrix} &= T \left[\frac{25}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{5}{4} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right] = \frac{25}{2} T \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{5}{4} T \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{25}{2} \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix} - \frac{5}{4} \begin{bmatrix} -9 \\ 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{125}{2} \\ -100 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{45}{4} \\ -5 \end{bmatrix} \\ T \begin{bmatrix} 10 \\ -15 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{125}{2} + \frac{45}{4} \\ -100 - 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{295}{4} \\ -105 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De manera similar:

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} c_1 + 2c_2 = 7 \\ -c_1 + 2c_2 = 11 \end{cases} \quad \text{Resolviendo} \quad \begin{cases} c_1 = -2 \\ c_2 = \frac{9}{2} \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} T \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix} &= T \left[-2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{9}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right] = -2T \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{9}{2} T \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= -2 \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix} + \frac{9}{2} \begin{bmatrix} -9 \\ 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -10 \\ 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{81}{2} \\ 18 \end{bmatrix} \\ T \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -10 - \frac{81}{2} \\ 16 + 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{101}{2} \\ 34 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

5.1 EJERCICIOS. Encuentre las transformaciones lineales de los siguientes ejercicios.

1) Sea $T : P_2 \rightarrow P_1$ una transformación lineal tal que:

$$T(1+x+x^2) = -1+3x \quad T(1+x-x^2) = -3+2x \quad T(1-x+x^2) = 1+2x$$

Encuentre $T(a+bx+cx^2)$ y $T(-25+15x-10x^2)$

$$\text{Respuesta : } -a-b+c + \left(2a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c\right)x \text{ y } \left(-\frac{95}{2}\right)x$$

2) Sea $T : P_1 \rightarrow P_1$ una transformación lineal tal que:

$$T(-1+x) = -8+5x \quad \text{y} \quad T(2+2x) = 4-9x$$

Encuentre $T(a+bx)$, $T(-15+10x)$ y $T(b+ax)$

3) Sea $T : R^3 \rightarrow R^2$ una transformación lineal tal que:

$$T(e_1 + e_2 + e_3) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad T(-e_1 + e_2 + e_3) = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \quad T(e_1 - e_2 + e_3) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Encuentre $T(x)$ y $T \begin{bmatrix} -10 \\ 15 \\ -25 \end{bmatrix}$

$$\text{Respuesta : } \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 2z \\ x - y - z \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} -\frac{95}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

4) Sea $T : R^2 \rightarrow R^3$ una transformación lineal tal que:

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{Encuentre } T \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ y } T \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

5) Sea $T : P_2 \rightarrow P_2$ una transformación lineal para la cual:

$$T(1+x) = 1+x^2 \quad T(x+x^2) = x-x^2 \quad T(1+x^2) = 1+x+x^2$$

Encuentre $T(4-x+3x^2)$ y $T(a+bx+cx^2)$

$$\text{Respuesta : } (4+3x+5x^2) \text{ y } \left(a+cx + \left(\frac{3a-b-c}{2}\right)x^2\right)$$

6) Sea $T : M_{22} \rightarrow R$ una transformación lineal para lo cual:

$$T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 \quad T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -4 \quad T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 5 \quad T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

Encuentre: $T \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ y $T \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

7) Sea $T : R^2 \rightarrow R^3$ una transformación lineal tal que:

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad y \quad T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{Encuentre } T \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad y \quad T \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{Respuesta: } \begin{bmatrix} -14 \\ 4 \\ 26 \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} -31 \\ -6 \\ 26 \end{bmatrix}$$

8) Sea $T : P \rightarrow P$ una transformación lineal que satisface:

$$T(x^n) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \quad n \geq 0$$

Encuentre: $T(x + x^2)$ $T(-1 + x^3)$ $T((1 + x^2)^2)$

6. APENDICE. Algebra Lineal con SCIENTIFIC WORD PLACE (Versión 5.0)

En la actualidad, el apoyo de Software para la motivación, cálculo y verificación de resultados obtenidos en las Matemáticas y sus aplicaciones en la Ingeniería en general, y en especial en la Ingeniería Electrónica, es de vital importancia. Por lo cual, se anexan una serie de ejercicios de algebra Lineal y operaciones con Números Complejos, con sus instrucciones de cálculo respectivas con el programa SCIENTIFIC WORD PLACE. Programa compatible con Microsoft, ya que utiliza una hoja de trabajo, ventanas, simbología y dinámicas de trabajo en general similares. Por lo hace un paquete muy factible y versátil, aún cuando se tengan bajos conocimientos en programación; sólo con pocas y sencillas instrucciones para los respectivos cálculos en varias ramas de las Matemáticas: Cálculo Diferencial e Integral, Cálculo de Varias Variables, Análisis Numérico, Probabilidad y Estadística, Transformadas de Laplace, Transformadas de Fourier, etc.

I. ALGEBRA LINEAL CON SCIENTIFIC WORKPLACE (VERSION 5.0)

Para los ejemplos siguientes es necesario abrir el campo correspondiente al arreglo de una matriz, de la siguiente manera:

Insert > matrix > número de renglones y columnas > ok

1. SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \rangle solve \quad exact \rangle \quad \text{Solution is : } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

1)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{Solution is : } \begin{pmatrix} 15 \\ \frac{59}{6} \\ -\frac{32}{3} \end{pmatrix}$$

2)

$$\begin{pmatrix} 12 & 10 & 23 \\ 34 & -20 & 22 \\ 110 & 45 & 55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 123 \\ 434 \\ 121 \end{pmatrix}, \text{Solution is : } \begin{pmatrix} \frac{1190}{2207} \\ -\frac{113542}{11035} \\ \frac{21055}{2207} \end{pmatrix}$$

3)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{Solution is : } \begin{pmatrix} \frac{24}{13} \\ -\frac{158}{39} \\ -\frac{23}{39} \\ \frac{100}{39} \end{pmatrix}$$

4)

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18 \\ 24 \\ 4 \end{vmatrix}, \text{ Solution is : } \begin{vmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{vmatrix}$$

5)

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 12 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18 \\ 24 \\ 30 \end{vmatrix}, \text{ Solution is : } \begin{vmatrix} 1+t_1 \\ 4-2t_1 \\ t_1 \end{vmatrix}$$

6)

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 \\ 4 \\ 10 \end{vmatrix}, \text{ Solution is : } \begin{vmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{vmatrix}$$

7)

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{vmatrix}, \text{ Solution is : } \begin{vmatrix} -\frac{4}{3}t_1 \\ -1-t_1 \\ t_1 \\ 5+\frac{7}{3}t_1 \end{vmatrix}$$

8)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ 7 \\ 11 \end{vmatrix}, \text{ Solution is : } \begin{vmatrix} \frac{19}{5} \\ \frac{1}{5} \end{vmatrix}$$

9)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & -4 & 8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ -9 \end{vmatrix}, \text{ No solution found.}$$

10)

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & 5 & 4 & 6 & 0 & u \\ -2 & 4 & 5 & 0 & 2 & 4 & v \\ 7 & 5 & 8 & 5 & 1 & 0 & w \\ 3 & 1 & 0 & 10 & 3 & 3 & x \\ 2 & 4 & 4 & 9 & 6 & 8 & y \\ 6 & 8 & 2 & 3 & 5 & 9 & z \end{array} = \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -9 \\ 8 \\ 2 \\ 1 \end{array}, \text{Solution is :}$$

$$\begin{array}{r} -\frac{52256}{25629} \\ \frac{82399}{25629} \\ -\frac{19508}{8543} \\ \frac{39410}{25629} \\ -\frac{5722}{25629} \\ -\frac{10837}{8543} \end{array}$$

2. SUMA Y RESTA DE MATRICES

$A + B > evaluate > C$

1)

$$3 \begin{vmatrix} 10 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 6 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 10 & 3 & -4 \\ 5 & 0 & 3 \\ 7 & 6 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 9 & 29 \\ -1 & 0 & 12 \\ -26 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

2)

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 11 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$$

3)

$$\begin{vmatrix} 9 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & -3 & 7 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \\ 6 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

4)

$$2 \begin{vmatrix} 11 & 6 & 7 \\ 2 & 6 & 2 \\ -6 & 3 & -1 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 \\ -7 & -3 & 9 \\ 7 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 46 & 42 & 56 \\ -38 & -6 & 58 \\ 30 & 36 & 4 \end{vmatrix}$$

5)

$$7 \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -9 & 3 & 11 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 7 & 9 \\ -5 & -3 & 3 \\ 9 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -49 & -4 \\ 17 & 6 & 8 \\ -81 & 17 & 75 \end{vmatrix}$$

3. MULTIPLICACION DE MATRICES

$AB > evaluate > C$

1)

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 46 \\ -1 & 22 \end{vmatrix}$$

2)

$$\begin{vmatrix} -4 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 10 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 6 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -53 & 1 & -5 \\ 25 & 21 & 25 \\ 73 & 27 & 61 \end{vmatrix}$$

3)

$$\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 0 & 12 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 & 6 \\ 4 & 4 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 28 & -7 & 10 \\ 56 & 28 & 40 \\ 39 & 29 & 20 \end{vmatrix}$$

4)

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \\ 8 & 8 & 5 \\ 7 & 5 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 6 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 84 & 65 \\ 24 & 2 \\ 107 & 114 \\ 83 & 87 \end{vmatrix}$$

5)

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 6 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \\ 8 & 8 & 5 \\ 7 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

4. INVERSA DE UNA MATRIZ

A > compute > matrices > inverse

1)

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}, \text{inverse: } \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{8} \end{vmatrix}$$

2)

$$\begin{vmatrix} -4 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & -1 \end{vmatrix}, \text{inverse: } \begin{vmatrix} -\frac{7}{124} & \frac{13}{62} & -\frac{3}{124} \\ \frac{15}{124} & -\frac{19}{62} & \frac{29}{124} \\ \frac{3}{124} & \frac{21}{62} & -\frac{19}{124} \end{vmatrix}$$

3)

$$\begin{vmatrix} -\frac{7}{124} & \frac{13}{62} & -\frac{3}{124} \\ \frac{15}{124} & -\frac{19}{62} & \frac{29}{124} \\ \frac{3}{124} & \frac{21}{62} & -\frac{19}{124} \end{vmatrix}, \text{inverse: } \begin{vmatrix} -4 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

4)

$$\begin{vmatrix} -2 & 8 & 6 \\ 4 & -6 & 0 \\ 5 & 7 & -6 \end{vmatrix}, \text{inverse: } \begin{vmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{26} & \frac{1}{13} \\ \frac{2}{39} & -\frac{1}{26} & \frac{2}{39} \\ \frac{29}{234} & \frac{3}{26} & -\frac{5}{117} \end{vmatrix}$$

5)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 & 6 & 0 \\ -2 & 4 & 5 & 0 & 2 & 4 \\ 7 & 5 & 8 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 10 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 9 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 2 & 3 & 5 & 9 \end{vmatrix} \text{ inverse: } \begin{vmatrix} -\frac{1345}{51258} & -\frac{13661}{51258} & \frac{2189}{25629} & -\frac{10471}{51258} & \frac{9397}{51258} & \frac{403}{17086} \\ \frac{3371}{51258} & \frac{20443}{51258} & -\frac{1561}{25629} & \frac{22547}{51258} & -\frac{27401}{51258} & \frac{2585}{17086} \\ -\frac{271}{8543} & -\frac{612}{8543} & \frac{844}{8543} & -\frac{1843}{8543} & \frac{1995}{8543} & -\frac{887}{8543} \\ -\frac{331}{25629} & \frac{3193}{25629} & -\frac{104}{25629} & \frac{5693}{25629} & -\frac{3080}{25629} & -\frac{193}{8543} \\ \frac{4439}{25629} & -\frac{4571}{25629} & -\frac{1625}{25629} & -\frac{3952}{25629} & \frac{3133}{25629} & \frac{188}{8543} \\ -\frac{1075}{8543} & -\frac{883}{8543} & \frac{101}{8543} & -\frac{1668}{8543} & \frac{2334}{8543} & -\frac{177}{8543} \end{vmatrix}$$

5. DETERMINANTE DE UNA MATRIZ

A > compute > matrices > determinant

1)

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 8 & 2 & -1 \end{vmatrix}, \text{determinant: } 128$$

2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & 10 \end{vmatrix}, \text{determinant: } -187$$

3)

$$\begin{vmatrix} -2 & 8 & 6 \\ 4 & -6 & 0 \\ 5 & 7 & -6 \end{vmatrix}, \text{determinant: } 468$$

4)

$$\begin{vmatrix} -\frac{7}{124} & \frac{13}{62} & \frac{3}{124} \\ \frac{15}{124} & -\frac{19}{62} & \frac{29}{124} \\ \frac{3}{124} & \frac{21}{62} & -\frac{19}{124} \end{vmatrix}, \text{determinant: } \frac{1}{124}$$

5)

$$\begin{vmatrix} 10 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 6 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix}, \text{determinant: } -222$$

6. TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ

A > compute > matrices > transpose

1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & 10 \end{vmatrix}, \text{transpose: } \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 10 \end{vmatrix}$$

2)

$$\begin{vmatrix} 10 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 6 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix}, \text{transpose: } \begin{vmatrix} 10 & 3 & -4 \\ 5 & 0 & 3 \\ 7 & 6 & -1 \end{vmatrix}$$

3)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 & 6 & 0 \\ -2 & 4 & 5 & 0 & 2 & 4 \\ 7 & 5 & 8 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 10 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 9 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 2 & 3 & 5 & 9 \end{vmatrix}, \text{transpose: } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 4 & 8 \\ 5 & 5 & 8 & 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 5 & 10 & 9 & 3 \\ 6 & 2 & 1 & 3 & 6 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

4)

$$\begin{vmatrix} -3 & 7 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 9 \\ 6 & 9 & 1 & 4 \\ 3 & -4 & -7 & 8 \end{vmatrix}, \text{transpose: } \begin{vmatrix} -3 & 4 & 6 & 3 \\ 7 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & -7 \\ 3 & 9 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

5)

$$\begin{vmatrix} -53 & 1 & -5 \\ 25 & 21 & 25 \\ 73 & 27 & 61 \end{vmatrix}, \text{transpose: } \begin{vmatrix} -53 & 25 & 73 \\ 1 & 21 & 27 \\ -5 & 25 & 61 \end{vmatrix}$$

7. TRAZA DE UNA MATRIZ
A > compute > matrices > trace

1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 10 \end{vmatrix}, \text{trace: } 13$$

2)

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 & 6 & 3 \\ 7 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & -7 \\ 3 & 9 & 4 & 8 \end{vmatrix}, \text{trace: } 7$$

3)

$$\begin{vmatrix} 10 & 40 & 16 & 83 \\ 17 & 11 & 79 & -14 \\ 35 & 63 & 21 & -37 \\ 23 & 79 & 94 & 58 \end{vmatrix}, \text{trace: } 100$$

II. OPERACIONES ELEMENTALES CON NUMEROS COMPLEJOS

$$Z_1 + Z_2 > \text{compute} > \text{evaluate} > Z_3 \quad \text{suma/resta}$$

$$Z_1 \cdot Z_2 > \text{compute} > \text{evaluate} > Z_3 \quad \text{multiplicación}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} > \text{compute} > \text{evaluate} > Z_3 \quad \text{división}$$

$$Z^n > \text{compute} > \text{evaluate} > Z_3 \quad \text{exponenciación}$$

Donde:

$$Z = a + ib$$

$$1) \quad (2 + 3i) + (7 - 6i) = 9 - 3i$$

$$2) \quad (12 - 3i) + (7 + 4i) = 19 + i$$

$$3) \quad (21 - 33i) + (72 + 6i) = 93 - 27i$$

$$4) \quad (2 - i)(11 + i) = 23 - 9i$$

$$5) \quad (14 - 5i)(15 - 4i) = 190 - 131i$$

$$6) \quad \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{7}i\right) + \left(\frac{7}{3} - \frac{6}{11}i\right) = 3 - \frac{9}{77}i$$

$$7) \quad \frac{3-i}{3+6i} = \frac{1}{15} - \frac{7}{15}i$$

$$8) \quad \frac{4+6i}{9-5i} = \frac{3}{53} + \frac{37}{53}i$$

$$9) \quad (6 - 8i)^4 = -8432 + 5376i$$

$$10) \quad \left(\frac{2+i}{6-5i}\right)^3 = -\frac{5033}{226981} - \frac{1744}{226981}i$$

2. RAICES COMPLEJAS

$$f(x) > \text{compute} > \text{solve} > \text{exact}$$

$$1) \quad x^2 + 4, \text{ Solution is: } 2i, -2i$$

$$2) \quad x^2 + 2x + 4, \text{ Solution is: } -i\sqrt{3} - 1, i\sqrt{3} - 1$$

$$3) \quad x^2 + x + 9, \text{ Solution is: } -\frac{1}{2}i\sqrt{35} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}i\sqrt{35} - \frac{1}{2}$$

$$4) \quad x^2 + 3x + 9, \text{ Solution is: } -\frac{3}{2}i\sqrt{3} - \frac{3}{2}, \frac{3}{2}i\sqrt{3} - \frac{3}{2}$$

- 5) $x^3 + 64$, Solution is: $-\sqrt[3]{64}, -\sqrt[3]{64} \left(\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2} \right), -\sqrt[3]{64} \left(-\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2} \right)$
- 6) $x^2 - x + 1$, Solution is: $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}, \frac{1}{2}i\sqrt{3} + \frac{1}{2}$
- 7) $x^2 + 2x + 16$, Solution is: $-i\sqrt{15} - 1, i\sqrt{15} - 1$
- 8) $x^2 + 5x + 76$, Solution is: $-\frac{3}{2}i\sqrt{31} - \frac{5}{2}, \frac{3}{2}i\sqrt{31} - \frac{5}{2}$
- 9) $x^3 + 81x$, Solution is: $0, -9i, 9i$
- 10) $x^2 + 6x + 24$, Solution is: $-i\sqrt{15} - 3, i\sqrt{15} - 3$

7. BIBLIOGRAFIA CONSULTADA.

- Derrick, William R. "Variable compleja con Aplicaciones". Editorial Iberoamérica. 1987.
- Spiegel Murray. "Variable Compleja". Schaum, Editorial Mc Graw Hill, México.
- Poole, David. "Algebra Lineal, una Introducción Moderna". Editorial Thomson. 2004.
- Grossman, Stanley I. "Algebra Lineal". Editorial Mc Graw Hill. Quinta Edición. 1996.
- Nakos, George / Joyner, David. "Algebra Lineal con Aplicaciones". Editorial Thomson. 1998.
- Howard, Anton. "Introducción al Algebra Lineal". Editorial Limusa, Primera Edición. 1976.